

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *correcteur* désignera une correctrice ou un correcteur.

Remarques générales

Le sujet de cette année était composé de 4 parties :

- La première partie consistait à étudier la réduction de matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur des exemples d'abord, et le cas général ensuite.
- La deuxième partie étudiait un couple de variables aléatoires finies à l'aide de calcul matriciel.
- La troisième partie s'intéressait principalement à la probabilité pour une matrice construite sur le modèle de celles de la partie A d'être (ou non) inversible et comprenait une question d'informatique.
- Enfin, la quatrième partie s'intéressait au lien entre l'indépendance de deux variables aléatoires finies et le rang de la matrice associée à leur loi conjointe.

L'épreuve abordait une part importante du programme de probabilités de PTSI/PT. Si dans ce sujet, l'algèbre se limitait à la réduction de matrices, tous les thèmes d'algèbre ont été abordés sur l'ensemble des deux épreuves de Mathématiques A et Mathématiques B.

La grande majorité des candidats a traité les trois premières parties, la quatrième a joué son rôle en permettant aux candidats les plus performants de faire la différence.

L'épreuve a donc permis de classer l'ensemble des candidats, même si le nombre de copies très faibles est bien plus important que dans les deux autres épreuves. Cela est dû, entre autres, au fait que 4 à 5% des candidats traitent uniquement la partie A du sujet et qu'ils sont également nombreux à n'effectuer dans la partie B que les calculs matriciels et à ne traiter dans la partie C que les trois questions de cours sur les lois usuelles (souvent avec un taux de réussite très faible).

Présentation des copies

Les correcteurs ont constaté pour cette session que, globalement, les candidats rayent proprement leurs tentatives infructueuses... même si ces ratures restent parfois un peu trop nombreuses : les candidats doivent apprendre à utiliser une feuille de brouillon.

Par ailleurs, le nombre de copies où les résultats sont encadrés est en nette diminution et il est rappelé aux candidats que cela doit se faire à l'aide d'une règle.

De plus, la langue française est malmenée dans de nombreuses copies : accords genre et nombre, confusion infinitif/participe passé et même parfois imparfait, confusion entre « son » et « sont »... ce qui rend certaines phrases incompréhensibles.

Enfin, il est rappelé aux candidats que les noms propres s'écrivent avec une majuscule et que ceux-ci doivent être correctement orthographiés : (Jacques ou Jakob) Bernoulli, (Isaac) Newton, (Irénée-Jules) Bienaymé, (Pafnouti) Tchebychev, (Siméon Denis) Poisson (les trois derniers étant écrits dans l'énoncé).

Rédaction

Les membres du jury rappellent aux (futurs) candidats que pour réussir une épreuve de concours, il est impératif de connaître et maîtriser son cours. Les théorèmes et propriétés ne se réduisent pas à une conclusion mais comportent également une ou plusieurs hypothèses qu'il convient de vérifier. De plus, lorsqu'il y a plusieurs hypothèses, et que chacune nécessite plusieurs lignes de justifications, il convient de faire une phrase les rassemblant toutes avant d'écrire la conclusion.

Quelques points particuliers concernant ce sujet :

- Les candidats qui utilisent dans une question un résultat obtenu dans une question précédente doivent rappeler le numéro de la question où celui-ci a été obtenu et en cas de nécessité, vérifier que les hypothèses nécessaires sont présentes.

- Il ne faut pas oublier la conclusion lorsque les calculs sont finis.

- Les candidats abusent de l'abréviation « proba ». D'une façon générale, les candidats ne doivent pas utiliser d'abréviations.

- Les candidats doivent définir leurs notations, en particulier celles des sous-espaces propres et de la multiplicité d'une valeur propre : on dépasse la douzaine de notations différentes pour l'ensemble de ces deux notions.

- Les arguments manquent de précision (ou sont pleins de sous-entendus) : « Le polynôme admet 2 racines » (sous-entendu : distinctes et/ou réelles), « Le polynôme admet 2 racines complexes » (sous-entendu : non réelles), « Le polynôme admet 2 racines complexes conjuguées » (sous-entendu : distinctes)... ce qui posait problème dans ce sujet, puisque c'est sur ces précisions que reposait l'essentiel des justifications.

- les candidats confondent « si ... alors », « pour que ... », « il faut que » et « si et seulement si » ainsi que les signes et termes mathématiques correspondants.

- on lit souvent « par critère nécessaire et suffisant de », « par critère suffisant de » et même l'ambigüe « par critère non nécessaire et suffisant de ». Dans la mesure où il n'y a pas unicité de tels critères, cela ne peut être considéré comme une justification. Il en est de même pour « par théorèmes généraux ».

- En ce qui concerne les sous-espaces propres :

- ◊ Les candidats utilisant un système introduisent désormais leurs systèmes. Mais il est encore constaté des produits entre un espace vectoriel et un vecteur, des égalités ou des équivalents entre un système/une matrice/un vecteur/un espace vectoriel.

- ◊ Les candidats utilisant les opérations sur les colonnes de la matrice oublient trop souvent de justifier la dimension du sous-espace propre (soit à l'aide du rang de la matrice, soit avec la multiplicité de la valeur propre). Par ailleurs le théorème du rang matriciel fait apparaître la dimension de $\mathbb{K}^n$ et non celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et encore moins celle de M_1 qui n'existe pas.

- Entre deux événements, on doit trouver des symboles tels que « = » ou « $\subset$ » mais pas « $\Leftrightarrow$ » ou « $\Rightarrow$ ». De même, entre deux probabilités, on ne devrait trouver ni signe $\cap$, ni signe $\cup$ (de très nombreuses intersections de probabilités ont été écrites dans les copies).

- Les fractions doivent être mises sous forme irréductible. On rappelle à ce sujet, la phrase suivante qui figurait dans le rapport de jury 2024 : « Les auteurs des sujets se réservent la possibilité de prévoir dans le barème une pénalité pour les candidats qui ne simplifient pas les fractions (ainsi que les racines carrées), avec une tolérance pour les lois de probabilités où toutes les probabilités pourront être laissées au même dénominateur (le plus petit possible). »

D'autres remarques et conseils concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question ci-après.

Partie A : Quelques matrices

1. La propriété est connue par un peu moins des deux tiers des candidats. Malheureusement, uniquement la moitié de ceux-ci la présente avec un « si et seulement si », ce qui correspond au terme « caractérisation ».
2. Cette question est relativement bien réussie (aux sous-entendus près signalés dans le paragraphe rédaction).
On trouve des copies dans lesquelles il est écrit « M_2 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ donc n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$ ».
Les candidats ont parfois oublié de répondre à l'une des deux questions sur la diagonalisation.
3. Cette question est nettement moins bien réussie. En particulier de très nombreux candidats, bien qu'ils aient affirmé que M_2 est diagonalisable, n'essayent pas de déterminer P_2 et même certains affirment que P_2 n'existe pas.
4. (a) Dans cette question également, il manque souvent la réponse à l'une des deux parties de la question.
Les correcteurs trouvent trop souvent « 3 est valeur propre double donc M_3 n'est pas diagonalisable » ou « M_3 n'a qu'une valeur propre donc M_3 n'est pas diagonalisable ».
D'ailleurs la condition « le polynôme caractéristique est scindé (et non scindable) à racines simples » est régulièrement présentée comme une condition nécessaire et suffisante et les correcteurs sont amenés à s'interroger sur le fait de savoir si les candidats connaissent la définition d'un polynôme scindé ainsi que la différence entre un polynôme scindé et un polynôme scindé à racines simples.
On trouve dans quelques copies qu'une matrice diagonalisable n'est pas trigonalisable.
(b) La question est souvent non traitée. Les correcteurs constatent que les formules de changement de base et/ou que la construction d'une matrice d'un endomorphisme dans une base donnée sont mal connues.
Les candidats ayant trouvé une base convenant ont souvent oublié de justifier qu'il s'agissait bien d'une base.
5. Une très grande majorité des candidats donne la condition attendue, à l'exception notable de ceux qui ne font pas le calcul du déterminant de $M(a, b)$, mais plus du tiers des candidats la présente comme une condition suffisante, plus rarement comme une condition nécessaire.
Ce problème va se répercuter dans la partie C puisque une phrase en « si ... alors » ne permet pas d'écrire une égalité entre les (probabilités des) événements ($M(A, B)$ est inversible) et ($A \neq B$).
6. Probablement la question la mieux réussie du sujet. La plupart des erreurs proviennent du développement de $(X - a)(X - 1)$, de $-4(a - b)$ ou de $-(-1)(-b)$.
7. (a) Les candidats ayant cherché le sous-espace propre associé à la valeur propre double ont parfois divisé par b ou $a - 1$ sans se préoccuper d'étudier le cas $b = 0$ ou $a = 1$.
Si la matrice $M(a, b)$ est diagonalisable alors elle est semblable à λI_2 où λ est la valeur propre double et non à I_2 .
Beaucoup de candidats écrivent, sans s'en rendre-compte, que la matrice I_2 n'est pas diagonalisable.
(b) Plus du tiers des candidats a fait l'impasse sur cette question... Et ils sont encore moins nombreux à avoir eu la totalité des points...
Là encore, les réponses sont souvent incomplètes
8. Deux facteurs ont rendu cette question pénible à corriger : les candidats ont écrit la légende sur la page 6 et le dessin figurait sur la page 22 et certains ont tout mis de la même couleur.

Par ailleurs, un nombre très important de candidats ne fait figurer ni repère, ni graduation sur les axes, ce qui est pénalisé.

Si les points associés aux matrices M_1 , M_2 et M_3 ainsi que la droite correspondant aux matrices non inversibles ont été bien placés, il n'en est pas de même pour la parabole associée aux matrices non diagonalisables, souvent non tracée et quand elle l'était, elle ne passait pas toujours par le point associé à M_3 .

Enfin, les correcteurs constatent que de nombreux candidats ont utilisé les deux pages de la feuille de papier millimétré fournie, l'une des pages étant raturée. Pour ce type de question aussi, il convient de savoir utiliser une feuille de brouillon, ne serait-ce que pour positionner l'origine du repère et choisir une unité adaptée.

Partie B : Un couple de variables aléatoires

1. (a) Le sujet demandait d'établir une formule puis d'effectuer un calcul. Les candidats qui ont déterminé la loi par une autre méthode et qui ont ensuite comparé avec le calcul matriciel n'ont donc pas respecté les consignes de l'énoncé et ont été pénalisés.

Par ailleurs, contrairement à ce que pensent de nombreux candidats, déterminer la loi marginale d'une des deux variables d'un couple ne consiste pas à additionner les cases de chaque ligne ou de chaque colonne d'un tableau. Pour déterminer ces lois, il convient de citer la formule des probabilités totales (parfois écrite sans être nommée) et il est indispensable de donner le système complet d'événements utilisé.

Un système complet d'événements ne peut pas être égal à $X(\Omega)$, X , (X, Y) ou $\{x_1, x_2, x_3\}$. La formule des probabilités totales est un incontournable des sujets de probabilités. Aussi, les correcteurs conseillent fortement aux futurs candidats d'apprendre à écrire et utiliser correctement cette formule.

- (b) Cette question est un peu mieux réussie que la précédente, en particulier par rapport à l'ordre demandé.

Certains candidats s'étonnent de trouver une espérance négative, d'autres confondent la définition de l'espérance avec le théorème de transfert.

A noter que le nombre de candidats proposant pour l'espérance de X un vecteur, sans que cela les trouble, est non négligeable.

2. Les correcteurs ont régulièrement trouvé dans les copies des produits qui n'existent pas comme $UV...$

Les copies des candidats ayant reconnu que la loi de Y est la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ ont été valorisées.

3. Les justifications sont souvent absentes. De plus de nombreux candidats parlent de l'espérance (ou de la variance) du couple (X, Y) , ce qui n'existe pas... et écrivent en dessous $E(X, Y)$.

On ne devrait pas trouver dans les copies des écritures comme $-\frac{1}{12} - 0 \times -\frac{1}{12}$.

4. L'expression de l'espérance en fonction de $E(XY)$, $E(X)$ et $E(Y)$ n'est connue que par 2 candidats sur 5...

5. Seul 1 candidat sur 5 propose deux méthodes distinctes. Donner deux couples (x_i, x_j) pour lesquels $P(X = x_i, Y = y_j) \neq P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$ ne représente pas deux méthodes distinctes, de même que $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ et $E(XY) \neq E(X)E(Y)$.

Le lien entre la covariance et l'indépendance est mal connu, il est régulièrement présenté comme une condition nécessaire et suffisante.

6. Une justification minimale était attendue. Par ailleurs, les candidats ne devraient pas encadrer $\text{tr}(C) = \frac{4}{12}$.

Partie C : Des variables aléatoires dans une matrice.

1. (a) Nombreux sont les candidats qui ne se rendent pas compte que le calcul a déjà été effectué à la question précédente et qui le recommencent ou qui inversement, traitent correctement cette question et ne se rendent pas compte qu'il ont ainsi répondu à la question précédente.
(b) Les candidats qui traitent cette question s'intéressent à $P(\Delta(A, B) = 0)$ mais rares sont ceux qui étudient les différents cas possibles et pour ceux qui le font, il manque souvent des cas (erreur de calculs ou confusion entre $<$ et $\leq$).
Plus rares ont été les candidats qui se sont trompés de coefficients dans la matrice ou qui ont considéré que tous les événements élémentaires étaient équiprobables.
2. On a très souvent $P(A = B) = \sum_{k \in H} P(A = k, B = k) = \sum_{k \in H} P(A = k)P(B = k)$.
Si la seconde égalité est bien justifiée, la première n'est presque jamais justifiée.
Nombreux sont les candidats qui vont refaire cette démonstration dans les questions 3 et 5.
3. (a) 39% des candidats uniquement donnent une réponse correcte à cette question de cours.
Les candidats sont invités à définir q .
(b) 46% des candidats uniquement donnent une réponse correcte à cette question de cours.
Les candidats sont invités à respecter les notations de l'énoncé.
(c) Le manque de bonnes réponses aux questions précédentes a conduit de nombreux candidats à ne pas avoir les bonnes bornes sur la somme. De plus, la formule du binôme de Newton n'est pas maîtrisée et on constate également des confusions avec la factorisation de $a^n - b^n$.
4. (a) 51% des candidats uniquement donnent une réponse correcte à cette question de cours.
(b) Que les candidats aient utilisé les fonctions génératrices ou déterminé directement la loi, ils ont trop souvent oublié de citer (et donc de justifier) l'indépendance des variables aléatoires A et C . En revanche, ceux qui l'ont citée, l'ont généralement bien justifiée.
Il n'était pas utile de faire appel à un produit de Cauchy, (surtout en oubliant les hypothèses) pour calculer le produit des deux fonctions génératrices.
(c) Question qui pouvait être faite en admettant le résultat précédent... et pourtant moins d'un candidat sur deux l'aborde.
5. Trop de candidats utilisent le résultat de la question 2 sans le rappeler... ou refont la démonstration.
6. (a) Les valeurs absolues sont mal gérées et finissent souvent par disparaître sans justification.
Si la plupart du temps, les candidats ont bien compris qu'il fallait comparer au développement en série entière de la fonction exponentielle, ils n'ont pas toujours écrit les inégalités dans le bon ordre et/ou fait attention à la borne inférieure des sommes de séries utilisées.
(b) Deux points à noter en ce qui concerne le langage PYTHON :
 - Nombre de candidats ne semblent pas connaître la syntaxe `from module import f, g, ...`. Cela fait pourtant partie des 3 méthodes exigibles d'importation d'un module ;
 - `range(eps)` renvoie un message d'erreur dès lors que `eps` n'est pas un entier naturel.

Par ailleurs, commenter un programme ne consiste pas à le paraphraser. Les correcteurs attendent que les candidats leur expliquent la démarche suivie ainsi que le rôle de chaque variable (en particulier celles dont le nom n'est pas explicite.)

On note de nombreuses erreurs dans les initialisations, le placement de l'instruction `n = n+1` ou le sens de l'inégalité dans le test d'arrêt de la boucle `while`.

Par ailleurs, il est étrange de noter que dans un certain nombre de copies, il est créé une

initialisation artificielle qui oblige le programme à exécuter au moins une fois les instructions de la boucle `while`.

Enfin, les correcteurs n'ont pas du tout compris pourquoi, dans de très nombreuses copies, le test d'arrêt portait sur la différence entre 2 termes consécutifs d'une suite (pas toujours la même...)

- (c) Il n'est pas très utile d'écrire une fonction si on ne sait pas s'en servir... et les correcteurs remarquent que c'est le cas de nombreux candidats (y compris parmi ceux qui ont répondu à la question précédente).

On ne peut pas écrire avec un clavier d'ordinateur `val_app(10-5)`.

Il est rappelé aux futurs candidats que la fonction `print` fait partie des fonctions exigibles. Comme il n'était pas précisé dans le sujet si l'instruction devait être écrite dans l'éditeur ou la console, son absence n'a pas été pénalisée.

7. (a) Il serait souhaitable que les candidats justifient toutes les lois même lorsque l'énoncé ne le demande pas.

Une loi de Bernoulli se justifie grâce à son univers image et le paramètre doit être justifié à l'aide de $P(J_i = 1)$.

- (b) La coquille sur l'indice de la somme définissant K_N n'a nullement gêné les candidats puisque tous ceux qui ont reconnu la loi de la question précédente ont donné la bonne loi ici.

Il était attendu que soit citée la propriété du programme suivante (en adaptant aux notations du sujet) : « Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p , alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p ». Cette propriété a été peu citée.

A la place, on trouve un discours plus ou moins compréhensible, dans lequel :

les correcteurs ont du mal à trouver le mot « indépendant(e) » - sans parler de sa justification ;

K_N est qualifié de (somme de) loi(s), de (succession d') expérience(s) aléatoire(s) alors que c'est une variable aléatoire ;

les expériences aléatoires, les succès/échec ne sont pas précisés...

- (c) L'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale et la linéarité de l'espérance sont bien connues des candidats traitant la question ; la formule donnant $V(aX + b)$ en fonction de $V(X)$ est moins connue.
- (d) Les candidats traitant la question écrivent correctement l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Par contre, l'inégalité $I(1 - I) \leq \frac{1}{4}$ est peu ou mal justifiée.
- (e) Les candidats ont bien compris qu'il fallait utiliser l'événement contraire. Malheureusement, celui-ci est souvent mal écrit et les inégalités passent de larges à strictes (ou inversement) en fonction des besoins des candidats sans que ceux-ci se préoccupent du lien entre les deux événements associés.
- (f) L'application numérique est souvent incomplète et ou erronée. Quant à l'interprétation, elle se limite souvent à une paraphrase de la formule. Pour la seconde application numérique, certains candidats mettent en cause leurs calculs et d'autres vont au delà de la question formulée puisqu'ils ajoutent qu'il faudrait plus de simulations pour obtenir la précision souhaitée.

Partie D : Un deuxième couple de variables aléatoires.

1. (a) Les réponses à cette question sont souvent confuses : « tous les coefficients sont liés aux autres », « toutes les lignes (ou colonnes) sont combinaisons linéaires des autres lignes (ou colonnes) ».
Les candidats justifiant correctement que toutes les lignes (ou colonnes) sont proportionnelles, oublient d'éliminer la matrice nulle.
 - (b) On trouve plus souvent « Q admet $n - 1$ (ou $n^2 - 1$) valeurs propres simples » que « 0 est valeur propre de Q d'ordre (au moins) $n - 1$ ».
La dernière valeur propre est rarement égale à $\text{tr}(Q)$ et les candidats oublient d'exclure le cas $\text{tr}(Q) = 0$.
 - (c) Généralement cohérente avec la question précédente... sauf pour les candidats qui évoquent le théorème spectral.
 - (d) Les matrices proposées ne peuvent pas correspondre à une loi conjointe (coefficients strictement plus grands que 1 ou dont la somme ne vaut pas 1) et ne sont pas de rang 1.
Il convenait également de prouver qu'elles n'étaient pas diagonalisables.
2. Question très peu traitée et jamais avec succès.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques B

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *correcteur* désignera une correctrice ou un correcteur.

Remarques générales

Le sujet de cette année était composé de 2 exercices :

- Le premier exercice se proposait de démontrer qu'un endomorphisme défini sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ était une rotation.
- Le deuxième exercice étudiait une conique définie par un foyer, une directrice et son excentricité en utilisant les nombres complexes puis s'intéressait à deux surfaces contenant cette conique.

L'épreuve abordait une part importante du programme de géométrie à l'exception des courbes paramétrées (pour faire un sujet de longueur raisonnable) ainsi que du programme d'algèbre de PTSI/PT à l'exception de la réduction, qui était évaluée dans l'épreuve de Mathématiques A.

La grande majorité des candidats a traité l'ensemble du sujet, même si les dernières questions de chaque exercice sont régulièrement laissées de côté. On compte d'ailleurs de nombreuses copies ayant obtenu une excellente note.

L'épreuve a permis de bien discriminer les candidats sur l'ensemble du spectre des notes.

Présentation des copies

Les correcteurs ont constaté pour cette session une nette diminution du nombre de copies dans lesquelles les résultats sont clairement mis en valeur à l'aide d'un encadrement, et ils rappellent aux candidats que les traits doivent être tracés à l'aide d'une règle.

En revanche, la plupart des candidats ont fait l'effort de rayer proprement les résultats qu'ils jugeaient erronés ... même si ces ratures restent parfois un peu trop nombreuses : les candidats doivent apprendre à utiliser une feuille de brouillon.

De plus, la maîtrise de la langue française demeure insuffisante dans un nombre significatif de copies : accords genre et nombre, confusion infinitif/participe passé et même parfois imparfait, verbes conjugués et adjectifs... ce qui rend certaines phrases incompréhensibles.

L'orthographe des termes mathématiques comme ellipse, parabole, hyperbole, cartésienne, tangente devrait être connue, à plus forte raison lorsque ceux-ci figurent dans l'énoncé.

Comme indiqué sur le sujet, les illustrations graphiques pertinentes sont valorisées lorsqu'elles accompagnent efficacement le raisonnement ou facilitent la lecture de la copie.

Rédaction

Les membres du jury rappellent aux (futurs) candidats que pour réussir une épreuve de concours, il est impératif de connaître et maîtriser son cours. Les théorèmes et propriétés ne se réduisent pas à une conclusion mais comportent également une ou plusieurs hypothèses qu'il convient de vérifier. De plus, lorsqu'il y a plusieurs hypothèses, et que chacune nécessite plusieurs lignes de justifications, il convient de faire une phrase les rassemblant toutes avant d'écrire la conclusion.

Quelques points particuliers concernant ce sujet :

◊ Les candidats qui utilisent dans une question un résultat obtenu dans une question précédente doivent rappeler le numéro de la question où celui-ci a été obtenu et en cas de nécessité, vérifier que les hypothèses nécessaires sont présentes.

◊ Une démonstration ne se limite pas à une suite de calculs : une conclusion explicite est attendue.

◊ Les notations introduites par les candidats doivent être clairement définies et, autant que possible, ne pas entrer en conflit avec celles de l'énoncé.

◊ Les candidats doivent porter une attention particulière à la nature des objets manipulés (vecteurs, polynômes, applications linéaires, matrices, courbes, surfaces...) : les confusions entre ces divers objets mathématiques ont été à l'origine de nombreuses erreurs.

◊ Les raisonnements par implication et par équivalence restent mal maîtrisés dans un nombre important de copies : les candidats confondent « si ... alors », « pour que ..., il faut que » et « si et seulement si » et utilisent les symboles $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$ sans en comprendre le sens.

D'autres remarques et conseils concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question ci-après.

Premier exercice.

Partie A

1. La caractérisation d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel usuel (à préciser) reste insuffisamment maîtrisée, et lorsqu'elle est connue, sa mise en œuvre est souvent laborieuse, en particulier les correcteurs voient des « $\in H$ » sans sujet (et là où ils sont, le sujet ne semble pas être un polynôme).

Ceux qui utilisent un « sous-espace vectoriel engendré par » s'en sortent mieux.

Les correcteurs n'ont pas compris pourquoi un certain nombre de candidats ont fait intervenir la fonction f .

Quant à la base, elle n'est pas toujours justifiée et des candidats assez nombreux ont proposé comme base, la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Par ailleurs, les bases de H sont constituées de polynômes (appartenant à H) et pas de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

2. La définition d'une application linéaire est bien connue (même s'il n'est pas utile de vérifier $f(0) = 0$).

En ce qui concerne l'ensemble d'arrivée, seuls 2 candidats sur 5 répondent correctement. A noter que 1 sur 5 répond H .

3. La définition d'un endomorphisme est moins maîtrisée que celle d'une application linéaire. Certains candidats confondent ces deux notions et donc démontrent la linéarité que le sujet demandait d'admettre.

Certains candidats ne lisent pas attentivement l'énoncé et démontrent que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

Pour les autres, ils partent bien de $P \in H$ mais certains ne se rendent pas compte qu'en réalité, ils prennent $P \in \mathbb{R}_3[X]$; d'autres démontrent uniquement que $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$ ou que $6P(0) = P^{(3)}(0)$.

Rares sont les candidats qui exploitent la base de H trouvée à la question 1.

Enfin, pour quelques candidats $((X + X^2)P'(0))' = (1 + 2X)P'(0) + (X + X^2)P''(0)$.

Partie B

4. Globalement, les candidats citent « bilinéaire, symétrique et définie positive » (et non positive et définie). Il n'était pas demandé d'explicitier les termes utilisés (ce n'est d'ailleurs pas toujours juste lorsque c'est fait).
En revanche, les domaines de définition et d'arrivée de φ étaient attendus. Ils sont rarement donnés et quand ils le sont, il y a régulièrement $\mathbb{R}_3[X]$ soit comme ensemble de départ, soit comme ensemble d'arrivée.
Des candidats confondent la définition d'un produit scalaire avec un exemple de produit scalaire.
5. Il s'agissait ici de démontrer un résultat, qui ne figure plus explicitement au programme, mais qui est utilisé par la grande majorité des candidats lors de la démonstration d'un produit scalaire.
Il y a les candidats qui se contentent de réécrire l'énoncé (en changeant « première variable » par « à gauche », ce qui n'était évidemment pas ce qui était attendu).
Les démonstrations sont parfois incomplètes et/ou confuses, en particulier lors de l'utilisation du caractère symétrique.
6. La démonstration faisant appel aux coefficients est généralement bien réussie. L'utilisation de la formule de Taylor pour les polynômes a été appréciée.
Celle faisant appel aux racines est bien moins souvent proposée et quand elle l'est, elle manque régulièrement de précisions : 4 racines (sous entendu distinctes ?) ou une infinité de racines, lesquelles ne sont pas données.
On rappelle qu'un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ n'est pas nécessairement de degré 3 et que la phrase « un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ possède au plus 3 racines » est fausse si on ne précise pas que le polynôme est non nul.
7. Question souvent bien réussie, même si certains candidats oublient de démontrer le caractère unitaire ou confondent vecteur unitaire avec polynôme unitaire.
Quant aux candidats qui ont souhaité utiliser les vecteurs des coordonnées dans la base canonique, ils devaient s'assurer que le produit scalaire proposé correspondait au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^4$, ce qui n'a jamais été fait.
Il ne fallait pas oublier de signaler que les deux vecteurs proposés appartenaient à H .
8. À quelques exceptions près, l'ordre demandé pour les éléments de la base a été respecté.
Beaucoup de candidats ont voulu utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Cela était possible mais parmi les candidats qui l'appliquent à $(X, X^2, 1 + X^3)$, beaucoup refont tous les calculs sans exploiter la question précédente. Quant à ceux qui l'appliquent à $(1 + X^3, X^2, X)$, ils ne se rendent pas compte que si cette base n'avait pas été déjà orthogonale, ils n'auraient pas pu obtenir la base demandée.
9. (a) Cette formule semble un peu mieux connue qu'il y a deux ans, mais reste encore trop peu connue. Les correcteurs incitent les candidats à la donner (en définissant leurs notations) même s'ils n'ont pas réussi à répondre à la question précédente.
(b) Les correcteurs constatent des confusions entre « une base de l'orthogonal de H » et « une base orthogonale de H ».
Il ne fallait pas oublier de justifier la dimension de l'orthogonal de H .

Partie C

10. Il n'est pas rare que la recherche de $\mathcal{B}'$ prenne plus d'une page... La base proposée n'est pas toujours orthogonale (ni même parfois une base), ou orthonormale et/ou directe.
On constate des confusions entre la matrice de r dans une base adaptée et la matrice de passage

de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}'$. Dans ce cas, la matrice dans la base adaptée est souvent celle que les candidats donnent à la question suivante.

À quelques exceptions près, les candidats ont fait attention à la position du vecteur dirigeant l'axe.

11. Les formules de changement de base associées aux endomorphismes restent trop souvent mal connues ou mal utilisées.
12. Bien que l'on pouvait traiter cette question sans faire les précédentes, elle a été peu traitée, sans doute à cause de sa position.
Les angles ne n'ont pas toujours été simplifiés et la symétrie orthogonale par rapport à Δ pour R^{2026} est peu citée et quand elle l'est, il manque « orthogonale » ou est qualifiée de « réflexion ».

Partie D

13. Quelques soucis de gestion de $\sqrt{2}$ pour les candidats ayant trouvé $\mathcal{B}'$.
Certains candidats proposent des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et même des matrices non carrées, et aucun ne signale qu'il doit y avoir un problème compte tenu de la question suivante.
14. Peu traitée dans la mesure où la plupart des candidats n'avaient pas les résultats nécessaires pour le faire.
Plutôt réussie dans les autres cas.

Deuxième exercice.

Partie A Cette première partie proposait 3 questions de cours.

Seuls 6% des candidats ont obtenu la totalité des points de cette partie.

1. 20% des candidats ont eu la totalité des points de cette question de cours.
Il semble que la plupart ne connaissent ni le mot « paramétrage », ni l'expression « branche d'une hyperbole ».
Dans le paramétrage, il ne faut pas oublier le domaine où évolue le paramètre.
2. 22% des candidats ont eu la totalité des points de cette question de cours.
3. 23% des candidats fournissent une réponse complète à cette question de cours.

Partie B

4. (a) Les caractérisations d'une projection orthogonale sont mal connues. Il était possible de passer par la formule de la projection vectorielle à condition d'utiliser le vecteur $\overrightarrow{AM}$ avec $A \in \mathcal{D}$ et non le vecteur $\overrightarrow{OM}$.
(b) Très peu traitée même par les candidats ayant réussi la question précédente.
5. Si tous les candidats qui traitent la question remplacent z' par le résultat de la question précédente (sans le dire), presque aucun des candidats (20%) ayant remplacé z par $z + \bar{z} e^{i\frac{\pi}{3}} - 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ n'a expliqué pourquoi.
On compte également des erreurs dans le développement de $-z'$.
6. Vu le résultat de la question 2., cette question ne pouvait pas être réussie. Ceux qui ont réussi à faire le lien avec la question 2. n'ont pas toujours trouvé le foyer.
Les candidats qui donnent une nature de conique au hasard (ce qui, juste ou pas, ne rapporte aucun point) devraient au minimum vérifier qu'ils proposent la même nature à la question 8.c.

Partie C

7. Il fallait commencer par (re)donner un vecteur $\vec{u}$. On note dans certains cas, des confusions claires entre vecteur normal et vecteur directeur ; dans d'autres cas, on ne sait pas s'il s'agit de la même confusion ou d'un énoncé mal lu.
Connaitre le cosinus d'un angle ne suffit pas à trouver cet angle. Les valeurs usuelles de la fonction arccosinus doivent être connues : les candidats ne devraient pas répondre $\alpha = \arccos(\frac{1}{2})$ et encore moins $\alpha = \arccos(\sqrt{3})$.
8. (a) Deux éléments à noter dans cette question : les candidats oublient soit de raisonner par équivalence soit de justifier leurs équivalences et le conjugué de $e^{i\alpha}Z$ n'est pas toujours correct.
De plus, dans certaines copies, il est très difficile pour le correcteur, et même parfois pour le candidat, de faire la différence entre z et Z .
- (b) Très peu traitée. Il semble que les candidats soient mal à l'aise avec les nombres complexes et encore plus avec le module d'un nombre complexe.
Les équivalences sont souvent oubliées.
- (c) Certains candidats se lancent dans des calculs inutilement longs (et régulièrement erronés) sans analyser au préalable la structure de la matrice étudiée.
Sauf indication contraire des candidats, les correcteurs ont considéré que les équations et coordonnées étaient données dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
Il est bien difficile, dans la plupart des copies, d'obtenir et/ou de trouver les trois éléments demandés.
- (d) Cette question est bien moins réussie que la question 11.b., alors qu'il s'agissait du même principe. Il y a manifestement des confusions avec les tangentes des courbes paramétrées.
Dans une équation de droite, il y a un signe égal ($=$). Par ailleurs, les équations doivent être données sous la forme $ax + by = c$ (ou $ax + by + c = 0$) et doivent être simplifiées.
9. (a) Certains candidats ne respectent pas l'unité imposée.
Tous les candidats qui n'ont pas fait apparaître de repère ou de graduations claires sur les axes ont été pénalisés et cette année, ils ont été très nombreux.
Enfin, il serait souhaitable que la courbe se rapproche de ses asymptotes.
- (b) Il manque très souvent le centre de la rotation et les candidats ont souvent hésité entre α et $-\alpha$ pour l'angle

Partie D

10. Les réponses à cette question sont très mal rédigées, à tel point que parfois les correcteurs se demandent si les candidats ne sont pas en train de démontrer que $S \subset \mathcal{C}''$. Il y a d'ailleurs des copies dans lesquelles les candidats ont démontré (à l'aide d'équivalents) que $S = \mathcal{C}''$.
11. (a) Même s'il y a des confusions entre point régulier et point singulier (et non point irrégulier), la plupart des candidats savent ce qu'il faut faire dans cette question, mais comme déjà souligné l'an dernier, l'équivalence $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$ est fausse. De plus, le raisonnement par équivalence ne va pas jusqu'au bout et les candidats ne vérifient pas que $O \in S$. Enfin, il y a trop souvent comme conclusion : « Les points réguliers de S sont $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ ».
- (b) Même remarque que l'an dernier pour cette question : la grande majorité des candidats a désormais compris qu'il fallait savoir trouver une telle équation.
Les correcteurs rappellent qu'ils veulent une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ (ou

$ax + by + cz = d$) avec des coefficients les plus « simples possibles ». La division par 6 a très souvent été faite, celle par -6 un peu moins.

12. (a) Les réponses ont rarement abouti à un résultat exploitable car les candidats n'ont pas d'objectifs (comment reconnaître un cercle), ils ne raisonnent pas par équivalence ou laissent tomber l'équation du plan, et $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ est identifiée comme l'équation d'un cercle et non d'une sphère.

Rares sont les candidats ayant fait le changement de base, mais ils sont arrivés au résultat (malgré des calculs pas toujours justes car faits un peu trop rapidement, faute sans doute de temps).

À noter que $\mathcal{C}_0 = \{O\}$ et donc n'était pas vide.

- (b) Toute affirmation doit être accompagnée d'une justification adaptée ; une réponse isolée (« oui » ou « non ») ne peut être prise en compte. Souvent les candidats qui répondent « non », donnent une justification qui exclut la sphère des surfaces de révolution.

Certains candidats ont donné un contre-exemple graphique, ce qui a été accepté, même si les correcteurs auraient préféré une explication utilisant la définition (ou une caractérisation) d'une surface de révolution.

13. Cette dernière question n'a été abordée que par un nombre très limité de candidats et seule une poignée d'entre eux a vu la condition $x \geq 1$.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *correcteur* désignera une correctrice ou un correcteur.

Remarques générales

Le sujet de cette année, très progressif, s'intéressait à la convergence de séries numériques et d'une famille d'intégrales dérivées de la fonction Gamma.

Cette épreuve a été nettement moins bien réussie que celle de l'année dernière. Si l'intégralité du sujet a été traitée (mention spéciale à des raisonnements très fins et élégants trouvés dans une partie de ces copies), l'un des points particulièrement bloquants pour les candidats a été la méconnaissance profonde du cours. Dès le Préambule, qui faisait appel à des notions de lycée (classe de Première), un nombre important de candidats n'ont pas été capables de donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction donnée. Ensuite, le sujet demandait de rappeler la formule de Taylor-Young : cette question, pourtant très simple, s'est révélée particulièrement discriminante – et donc classante. Une grande partie des candidats ont écrit une égalité entre la fonction approchée et la partie principale (polynomiale) du développement limité ; pour d'autres, le terme d'erreur est en « $o(n)$ », « $o(\psi^n)$ », révélant une incompréhension profonde de l'approximation afférente. D'autres n'ont pas compris que si le développement est (demandé) à l'ordre n , c'est parce que l'on s'arrête aux termes d'ordre n – en x^n – et non en x^{n+1} , et que le reste – le terme d'erreur – est un $o(x^n)$ et non un $o(x^{n+1})$ (et certainement pas un $o(x^k)$ si k est l'indice de sommation utilisé dans l'expression de la partie polynomiale), parce que justement il doit être négligeable devant le dernier terme en x^n du développement.

En ce qui concerne la présentation des copies, nous avons noté une nette dégradation de l'écriture. De très nombreuses copies (y compris de très bonnes copies) sont difficilement déchiffrables. Certaines restent écrites avec de l'encre très pâle, ce qui n'arrange pas les choses. Beaucoup de copies sont présentées de façon trop dense, sans espacement entre les questions, parfois, il y a même des imbrications entre les lignes : ce n'est pas au correcteur de partir à la pêche des résultats (non valorisés, non encadrés).

De nombreuses formulations employées par les candidats ne veulent rien dire : « f et g sont C^1 sur $\mathbb{R}$ car $t \neq t_0$ », ou « $D_f = D_G = \mathbb{R}$ car $t \neq t_0$ ».

Enfin, en ce qui concerne l'orthographe, elle laisse toujours à désirer : le mot « Partie », figurant pourtant à maintes reprises dans l'énoncé, devient « PARTI ». En ce qui concerne les termes mathématiques, et les noms propres de mathématiciens, ce n'est pas mieux : comme par le passé, Riemann est déformé en « reiman », « reimanne », ou autres variantes, sans majuscule qui plus est. Quant à (Hermann Amandus) Schwarz, il est confondu avec (Laurent) Schwartz. Nous avons aussi – malgré ce qui figurait dans le rapport de l'an passé – retrouvé les sempiternelles abréviations : « cc » (pour *croissances comparées*), par exemple, ou la terminologie transformée : si on dit qu'une intégrale est impropre, on ne parle pas « d'impropreté », ni « d'intégrale propre ».

Certains résultats étaient donnés et il était demandé de les démontrer. De nombreux candidats ont essayé de « bricoler le résultat », en présentant une suite de calculs faux ou peu précis, pour arriver au résultat donné.

Nous rappelons également que les traits se tirent à la règle, et que les résultats doivent être encadrés.

Remarques particulières

Préambule

1. Dans cette première question, il fallait donner le domaine de dérivabilité des fonctions f et g et montrer que, pour tout réel t de ce domaine, les dérivées de f et g coïncident.

La majorité des candidats ont répondu correctement à cette question. Pour le domaine de dérivabilité des deux fonctions, un minimum de justification était attendu : les fonctions sont des fonctions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$. Parler de composition de fonctions a un sens lorsque l'on explique quelles sont les fonctions en jeu (la fonction inverse et la fonction $t \mapsto t - t_0$). De nombreux candidats ont donné ce domaine sans aucune explication, beaucoup ont expliqué que « les fonctions étaient définies et continues sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ et donc dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ ». Dans le même ordre d'idée, des candidats ont indiqué que le domaine était $\mathbb{R}$ puisque l'énoncé indiquait que t était différent de t_0 .

Des candidats n'ont pas su répondre à cette question, trouvant soit des dérivées opposées, soit des expressions exotiques, ou bien aucune expression du tout.

Nous signalons que de nombreux candidats confondent le symbole mathématique « privé de » $\setminus$ avec le *slash* $/$.

Enfin, il semble que certains candidats ne connaissent pas le sens du verbe *coïncider*. Plusieurs d'entre eux ont en effet écrit : « $f' = -g'$, donc f' et g' coïncident ».

2. La seconde question de ce Préambule demandait le tableau de variations de f sur $] -\infty, t_0[$ et sur $] t_0, +\infty[$, en précisant les limites aux bornes.

Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats. Nous rappelons que les bornes doivent figurer *sur le tableau de variations* et non à part.

Des candidats ont donné des tableaux aberrants, avec des fonctions croissantes de -1 à -1 , ou de 0 à 0 .

3. Cette question demandait de donner une équation de la tangente T à la courbe représentative de f en 0 .

De très nombreux candidats ne connaissent pas l'expression donnant la forme générale de l'équation de la tangente à une courbe donnée en un point.

D'autres écrivent « $\frac{t}{t_0}$ », au lieu de $y = \frac{t}{t_0}$. Nous avons aussi trouvé tout un lot de réponses de la forme « $T = \frac{t}{t_0}$ », « $f(t) = \frac{t}{t_0}$ », voire des expressions quadratiques, ce qui est ennuyeux lorsqu'il s'agit d'une droite.

4. La majorité des candidats ont correctement tracé la tangente T et l'allure du graphe de f sur $] -\infty, t_0[$ et sur $] t_0, +\infty[$. Beaucoup ont omis la tangente (bien précisée dans l'énoncé, et dont le tracé aide pour celui de la courbe). D'autres ont fait deux tracés distincts : un pour la (seule) tangente, un autre pour la (seule) courbe. L'asymptote verticale $x = 1$ et l'asymptote horizontale $y = -1$ ne figuraient pas sur un nombre important de tracés.
5. Cette question, qui demandait de montrer que, si n est un entier naturel non nul, la fonction f est n fois dérivable sur $] -\infty, t_0[$ et sur $] t_0, +\infty[$, et de donner, à l'aide d'une démonstration par récurrence, l'expression de sa dérivée $n^{\text{ième}}$, $f^{(n)}$, sur $] -\infty, t_0[$ et sur $] t_0, +\infty[$, a été correctement traitée par la majorité des candidats. Toutefois, un nombre non négligeable de candidats ont donné des réponses exotiques, avec des expressions impliquant des sommes avec des coefficients binomiaux, des puissances de 2, des $(-1)^n$.
6. Si une grande partie (un quart) des candidats ont correctement déterminé une primitive G de g sur $] -\infty, t_0[$ et sur $] t_0, +\infty[$, beaucoup ont voulu donner une seule

réponse, sans utiliser de valeur absolue : $t \mapsto -t_0 \ln(t - t_0)$ ne peut pas convenir sur $] -\infty, t_0[$. Ou alors, la valeur absolue est utilisée sur $]t_0, +\infty[$, mais pas sur $] -\infty, t_0[$, ce qui donne l'impression que la notion de valeur absolue reste confuse, comme on le constate d'ailleurs dans la dernière partie du problème. Beaucoup de candidats ont omis le signe moins requis devant le t_0 en facteur du logarithme népérien.

En ce qui concerne la détermination d'une primitive F de f sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, elle n'a été correctement faite que sur peu de copies. Les candidats n'ont pas pensé à utiliser le fait que, pour tout réel $t \neq t_0$, $f(t) = -1 + g(t)$, et qu'il suffisait donc de primitiver la fonction constante égale à -1 et d'utiliser le résultat sur G . Nous avons trouvé sur beaucoup de copies des calculs extrêmement longs et compliqués, qui n'aboutissaient pas.

7. Cette question demandait un énoncé du cours : la formule de Taylor-Young à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de x_0 pour une fonction ψ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Cette question, très classante, n'a été traitée correctement que par à peine un quart des candidats.

Comme évoqué au début de ce rapport, de nombreux candidats ont écrit une égalité entre la fonction approchée et la partie principale (polynomiale) du développement limité ; pour d'autres, le terme d'erreur est en $\ll o(n) \gg$, $\ll o(\psi^n) \gg$. Certains n'ont pas compris que si le développement est (demandé) à l'ordre n , c'est parce que l'on s'arrête aux termes d'ordre n – en x^n – et non en x^{n+1} , et que le reste – le terme d'erreur – est un $o(x^n)$ et non un $o(x^{n+1})$ (et certainement pas un $o(x^k)$ si k est l'indice de sommation utilisé dans l'expression de la partie polynomiale), parce que justement il doit être négligeable devant le dernier terme en x^n du développement. Certains candidats ont écrit l'égalité entre le développement (ou sa partie principale) et $\ll \psi(x_0) \gg$, au lieu de $\psi(x_0 + h)$ ou $\psi(x)$.

8. Dans cette question, il était attendu que les candidats appliquent la précédente et donnent, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ (en détaillant la réponse, ce qui supposait de calculer la valeur des dérivées $k^{\text{ièmes}}$ en 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$, pour $0 \leq k \leq n$).

A peine plus d'un dixième des candidats ont répondu correctement à cette question. Beaucoup de candidats ont écrit une égalité entre $\frac{1}{1-t}$ et $\sum_{k=0}^n t^k$ (ou $\sum_{k=1}^n t^k$,

voire $\sum_{k=0}^n (-1)^k t^k$. Nous avons aussi trouvé des expressions avec des factorielles.

Enfin, de nombreux candidats écrivent le développement limité d'une fonction qui dépend de la variable t , en fonction d'une nouvelle variable x , sans doute par habitude, ce qui démontre un manque de rigueur et d'attention.

9. La dernière question de ce Préambule demandait de déduire de la précédente, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \ln(1 - t)$.

Cette question a été mieux réussie que la précédente (environ la moitié des candidats). Il suffisait d'appliquer le théorème d'intégration des développements limités (ce qui n'a été que rarement justifié).

L'autre moitié restante des candidats ont donné des réponses sans le terme de reste en *petit o*, avec des expressions aberrantes (le logarithme népérien prenant des valeurs négatives sur $]0, 1[$) de la forme $-t - \frac{t^2}{2} - \dots$, ou encore $t - \frac{t^2}{2} - \dots$ ou $1 - t - \frac{t^2}{2} - \dots$.

Partie I

1. Cette première question, qui demandait de déterminer, sur $\mathbb{R}_+^*$ une primitive H de la fonction h telle que, pour tout réel strictement positif t :

$$h(t) = \frac{1}{t + t^2}$$

a été traitée correctement dans la grande majorité des copies, à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

Un nombre non négligeable de candidats ont donné une expression non simplifiée, de la forme $t \mapsto \ln(t + t^2) - 2 \ln(1 + t)$.

2. Dans cette seconde question, il fallait, pour tout entier naturel $n \geq 2$, étudier la convergence de l'intégrale $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2}$, puis la calculer.

Là encore, cette question a été traitée correctement dans la grande majorité des copies. Si les candidats semblent bien maîtriser les techniques de comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, ce n'est pas le cas de la notion de *petit o* : ainsi, lorsque t tend vers plus l'infini, $\frac{1}{t + t^2}$ n'est absolument pas un « $o\left(\frac{1}{t + t^2}\right)$ ».

Dans un nombre important de copies, les candidats ont justifié la convergence de l'intégrale en montrant l'existence de la limite $\lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{t}{1+t} \right)$, ce qui est correct.

3. Cette troisième question demandait de donner, pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'expression de u_n en fonction de n .

Si cette question a, encore une fois, été correctement traitée par la majorité des candidats, un nombre non négligeable de candidats ont essayé de *reconstituer la réponse* à l'aide de l'expression finale donnée par l'énoncé, ce qui les a souvent conduits à des expressions aberrantes, où ils écrivent une égalité entre $-n \int_0^\pi \frac{\sin(nt) dt}{n + \cos(nt)}$ et $\ln(n + \cos(n\pi))$ et $\ln(n+1) - \ln n$, ou autres variantes.

4. La très grande majorité des candidats ont obtenu la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

S'il suffisait d'utiliser la composition des limites, une partie importante des candidats ont utilisé l'encadrement

$$\forall n \geq 1 : 1 - \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{(-1)^n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

puis le théorème des gendarmes.

Certains sont passés par un développement asymptotique.

Nous rappelons que $\ln 1 = 0$, et qu'il est mieux de donner la réponse simplifiée.

5. Dans cette question, on demandait de montrer que, si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries convergentes, alors $\sum (a_n + \lambda b_n)$ est une série convergente.

Cette question n'a été correctement traitée que par peu de copies. Il suffisait d'utiliser la linéarité des sommes partielles $\sum_{k=0}^n (a_k + \lambda b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \lambda \sum_{k=0}^n b_k$ et de passer à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini.

De très nombreux candidats manipulent les séries comme si elles étaient des réels : écrire une égalité entre $\sum (a_n + \lambda b_n)$ et $\ll \sum a_n + \lambda \sum b_n \gg$ n'a pas de sens.

Un nombre important de candidats ont voulu appliquer le critère spécial des séries alternées à $\sum u_n$, mais, ne maîtrisant pas cette notion, ils ont voulu montrer que la suite (u_n) était décroissante, sans prendre garde au fait que les termes de cette suite n'étaient pas tous positifs.

6. Dans cette question, pour étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ (où, pour tout entier naturel $n \geq 2$, u_n a été introduit à la question 3.), il suffisait d'utiliser le résultat de la question précédente.

Moins d'un dixième des copies ont traité correctement cette question. Beaucoup de candidats ont voulu raisonner sur l'équivalence entre u_n et $\frac{(-1)^n}{n}$, lorsque l'entier n tend vers l'infini, sans faire attention au fait que le signe des expressions concernées n'était pas constant.

La question de la convergence absolue a été mieux traitée.

7. (a) Dans cette question, on demandait de montrer que, pour tout entier naturel $N \geq 1$, la somme partielle S_{2N} valait $\ln \frac{2N+1}{2N}$.

Cette question a été correctement traitée par environ un quart des candidats. Si la solution naturelle consistait à découper la somme en séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs, un nombre important de candidats ont fait une démonstration par récurrence, ce qui était aussi possible.

Un nombre important de candidats ont parlé de « télescopage » (ce qui n'est pas une démonstration), et donné la réponse figurant dans l'énoncé, mais sans aucune justification. D'autres ont essayé de le montrer *à la main*, en explicitant les premiers termes de la somme. Enfin, certains ont cru qu'il fallait calculer $\sum_{k=1}^n u_{2k}$.

Nous rappelons aussi l'importance d'utiliser des parenthèses – de délimitation – dans des expressions de la forme

$$\sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k)$$

Souvent, les candidats écrivent « $\sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln k$ », ce qui n'est pas correct.

- (b) Dans cette question, on demandait de comparer, pour tout entier naturel $n \geq 1$, u_{2n+1} et u_{2n} .

Cette question n'a été correctement traitée que par moins d'un tiers des candidats. Il fallait simplement remarquer que u_{2n+1} et u_{2n} étaient opposés.

La majorité des candidats n'ont pas été au bout du calcul, se contentant d'écrire :
 $\ll u_{2n+1} = \ln \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \leq 0 \gg$ et $\ll u_{2n} = \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \geq 0 \gg$.

- (c) Dans cette question, il fallait déduire de la précédente, pour tout entier naturel $N \geq 2$, S_{2N-1} .

Environ un cinquième des candidats ont correctement répondu. S'il fallait *a priori* utiliser le fait que, pour tout entier k de, $\{1, \dots, N-1\}$, u_{2k} et u_{2k+1} étaient opposés, il était aussi possible d'utiliser la relation $S_{2N-1} = S_{2N} - u_{2N}$, ce qui a été fait par une grande partie des candidats ayant traité correctement la question.

Un nombre important de candidats ont écrit une égalité entre S_{2N-1} et $-S_{2N}$.

Cette question a permis de bien mettre en évidence que ceux qui « trouvaient » le résultat de la question (a) « par télescopage » n'avaient souvent pas bien compris, puisqu'ils ne l'appliquaient pas ici, ou mal.

- (d) Cette ultime question de la Partie I, où il fallait donner la valeur de la somme de la série considérée, a été correctement traitée par moins d'un cinquième des candidats.

Un nombre important de candidats ont donné une réponse juste sur la base de justifications fausses (comme, par exemple, une égalité entre S_{2N-1} et $-S_{2N}$.)

Partie II

1. Dans cette question, on fixait l'entier naturel non nul n , et on demandait d'étudier, pour tout réel $x > 1$, la convergence de l'intégrale $G_n(x) = \int_0^{+\infty} x^{-nt} t^n dt$.

Les candidats ont, le plus souvent, utilisé le fait que, lorsque t tend vers l'infini, l'intégrande est un $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Toutefois, il fallait le justifier à l'aide des croissances comparées, ce qui n'a pas toujours été fait. D'autre part, les candidats s'arrêtent

souvent au $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, sans rappeler le théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives et le fait que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente.

Si la moitié des candidats ont répondu correctement à cette question, nous avons trouvé beaucoup de réponses complètement fausses, où les candidats majorent l'intégrande par t^n et écrivent ensuite que $\ll \int_0^{+\infty} t^n dt$ (ou $\int_1^{+\infty} t^n dt$) converge $\gg$. De nombreux candidats ont écrit que, lorsque t tend vers l'infini, $x^{-nt} t^n$ était équivalent à x^{-nt} .

D'autres ont voulu majorer l'intégrande par e^{-t} ou $\frac{1}{t^2}$, ou encore écrire que l'intégrande était un $o(e^{-t})$.

Un nombre important de candidats ont donné des équivalents (parfois exotiques) ou des *petits o* sans aucune justification.

2. Cette question a aussi été traitée correctement par environ la moitié des candidats. Il fallait appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres (à condition de le citer), la majoration de l'intégrande pour tout réel x de $[a, +\infty[$ étant directement donnée par $G_n(a)$ et la question précédente, sous réserve bien sûr de l'écrire, ce qui n'a pas toujours été le cas, beaucoup de candidats se contentant d'écrire que $\ll \int_0^{+\infty} a^{-nt} t^n dt$ converge $\gg$ (sans détails, et même lorsque la question précédente n'a pas été correctement traitée).

Un nombre important de candidats domine le module de la fonction par une fonction positive (continue dans le meilleur des cas), mais ne disent pas qu'elle doit être intégrable. D'ailleurs, certaines fonctions de majorations proposées ne sont justement pas intégrables.

3. Cette question, où il fallait cette fois appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, a été correctement traitée par environ un quart des candidats. Certains appliquent le théorème, mais de façon *subliminale*, puisqu'aucune mention n'en est faite. De nombreuses copies ont des majorations de valeurs absolues par des quantités négatives, des majorations non explicitées par $\ll \varphi(t)$ qui est intégrable (et parfois dérivable) $\gg$. Pour les copies ayant obtenu la majoration correcte, un minimum de justification de l'intégrabilité de la fonction était attendue : soit parce que l'on avait directement $nG_{n+1}(a)$ et que l'on utilisait le résultat de la première question, ou alors, en appliquant à nouveau les croissances comparées pour montrer que l'on avait un $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente.

4. Dans cette question, il fallait montrer, à l'aide d'un changement de variable et d'une intégration par parties généralisée que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel $x > 1$:

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} G_n(x)$$

Environ un cinquième des candidats ont correctement traité cette question. Dans de nombreuses copies, les candidats ne font pas figurer le détail du calcul, il faut chercher le crochet ailleurs, ce qui ne va pas, nous l'avons déjà signalé à plusieurs reprises. Souvent aussi, ce crochet est mentionné nul, mais sans aucune justification.

Des candidats n'ont pas suivi l'indication de l'énoncé et ont voulu partir de l'expression de $G_n(x)$: si certains ont abouti au bon résultat, les autres se sont souvent perdus dans des calculs dantesques qui n'ont pas abouti.

Des copies ont *magiquement* fait apparaître le $\ln x$.

5. Dans cette question, il fallait calculer $G_1(x)$.

Cette question a été correctement traitée par un peu plus d'un sixième des candidats. Un nombre important de candidats ont donné une expression négative (ce qui est aberrant pour l'intégrale d'une fonction positive), ou encore $\frac{1}{x^2}$, ou 1, et même souvent, 0.

6. Cette question, où il fallait exprimer, pour tout réel $x > 1$ et tout entier naturel non nul n , $G_n(x)$ en fonction de n , a été correctement traitée par environ un dixième des candidats.

L'énoncé précisait bien qu'une preuve faisant intervenir explicitement une récurrence était attendue, mais un nombre important de candidats se sont contentés d'écrire *par récurrence évidente*.

Certains candidats ont donné le résultat en fonction de G_1 , mais d'autres ont conservé leur erreur de calcul sur G_1 , même quand la valeur trouvée était négative. Cela montre souvent un manque de recul.

Nous avons trouvé dans des copies, des expressions de la forme $\ll x \times -y \gg$, ce qui n'est pas correct.

7. Dans cette question, il fallait, dans un premier temps, en reconnaissant une série géométrique de raison $\frac{1}{\ln x}$, donner une condition nécessaire et suffisante de conver-

gence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n G_n(x)}{(n-1)!}$.

Un dixième des candidats ont correctement traité cette première partie de la question. Beaucoup de candidats ont bien écrit qu'il fallait $\frac{1}{\ln x} < 1$, mais ont ensuite donné $\ll \frac{1}{e} < x < e \gg$.

En ce qui concerne le calcul de la somme $S(x)$, beaucoup de candidats n'ont pas fait attention qu'il fallait sommer à partir de 1 les termes en $\frac{1}{(\ln x)^{n+1}}$, ce qui revenait à sommer à partir de 2 les termes en $\frac{1}{(\ln x)^n}$ (on pouvait aussi mettre en facteur le $G_1(x)$ de la question 5).

8. Dans cette huitième question, il fallait, à l'aide de la valeur de la somme de la série de la Partie I et de la continuité de la fonction G , calculer :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} G_n \left(e \prod_{k=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k} \right) \right)$$

Un peu plus d'un vingtième des candidats ont correctement traité cette question.

Partie III

1. Dans cette question, on demandait d'exprimer, pour tout couple (x, y) de réels distincts, la hessienne de la fonction de deux variables φ .

Un peu moins de la moitié des candidats ont correctement traité cette question. De nombreuses erreurs viennent d'un signe moins omis dans la dérivée croisée $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$, ou rajouté dans l'expression de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ et/ou $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$.

Beaucoup de candidats ont fait des erreurs de signe car, comme évoqué précédemment, ils étaient visiblement gênés par la valeur absolue. Certains ont donné deux Hessiennes différentes, suivant que $x < y$ ou $y < x$.

2. Environ 60% des candidats ont montré que la fonction φ admet un point critique en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$x_0 = -y_0 = \frac{1}{2(x_0 - y_0)}$$

Si les candidats semblent bien connaître et maîtriser la notion de point critique, certains ont écrit que le gradient de la fonction φ était le scalaire $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

3. Environ un cinquième des candidats ont donné les valeurs possibles des réels x_0 et y_0 introduits à la question précédente. Certains ont donné une réponse partielle : $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, d'autres des réponses incomplètes ou non finalisées, de la forme « $x = \pm \frac{1}{2}$ », ou alors, avec des expressions impliquant des $\sqrt{4}$, non simplifiées en 2.
4. Très peu de candidats ont correctement montré que, pour les valeurs possibles de x_0 et y_0 obtenues à la question précédente, la fonction φ admettait un minimum local en (x_0, y_0) .

Certains candidats ont très proprement utilisé un développement limité d'ordre 2 au voisinage de (x_0, y_0) , montrant une parfaite compréhension de la notion de minimum local et des conditions correspondantes sur les valeurs propres de la matrice hessienne.

Mais souvent, l'expression fautive de la matrice hessienne ne permet pas d'obtenir le bon résultat. Ou alors, la réponse n'est pas finalisée (pas de calcul du déterminant et de la trace de la matrice).

5. Dans cette dernière question, plus délicate, il fallait déjà montrer que le minimum local $\varphi(x_0, y_0)$ était un minimum global (par exemple, en étudiant les limites de φ aux bords du domaine d'étude). Certaines très bonnes copies l'ont fait.

Pour le reste, une partie des candidats ont bien compris l'interprétation demandée sur le $\mathcal{O}(N)$.