

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *correcteur* désignera une correctrice ou un correcteur.

Remarques générales

Le sujet de cette année, très progressif, s'intéressait à la convergence de séries numériques et d'une famille d'intégrales dérivées de la fonction Gamma.

Cette épreuve a été nettement moins bien réussie que celle de l'année dernière. Si l'intégralité du sujet a été traitée (mention spéciale à des raisonnements très fins et élégants trouvés dans une partie de ces copies), l'un des points particulièrement bloquants pour les candidats a été la méconnaissance profonde du cours. Dès le Préambule, qui faisait appel à des notions de lycée (classe de Première), un nombre important de candidats n'ont pas été capables de donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction donnée. Ensuite, le sujet demandait de rappeler la formule de Taylor-Young : cette question, pourtant très simple, s'est révélée particulièrement discriminante – et donc classante. Une grande partie des candidats ont écrit une égalité entre la fonction approchée et la partie principale (polynomiale) du développement limité ; pour d'autres, le terme d'erreur est en « $o(n)$ », « $o(\psi^n)$ », révélant une incompréhension profonde de l'approximation afférente. D'autres n'ont pas compris que si le développement est (demandé) à l'ordre n , c'est parce que l'on s'arrête aux termes d'ordre n – en x^n – et non en x^{n+1} , et que le reste – le terme d'erreur – est un $o(x^n)$ et non un $o(x^{n+1})$ (et certainement pas un $o(x^k)$ si k est l'indice de sommation utilisé dans l'expression de la partie polynomiale), parce que justement il doit être négligeable devant le dernier terme en x^n du développement.

En ce qui concerne la présentation des copies, nous avons noté une nette dégradation de l'écriture. De très nombreuses copies (y compris de très bonnes copies) sont difficilement déchiffrables. Certaines restent écrites avec de l'encre très pâle, ce qui n'arrange pas les choses. Beaucoup de copies sont présentées de façon trop dense, sans espacement entre les questions, parfois, il y a même des imbrications entre les lignes : ce n'est pas au correcteur de partir à la pêche des résultats (non valorisés, non encadrés).

De nombreuses formulations employées par les candidats ne veulent rien dire : « f et g sont C^1 sur $\mathbb{R}$ car $t \neq t_0$ », ou « $D_f = D_G = \mathbb{R}$ car $t \neq t_0$ ».

Enfin, en ce qui concerne l'orthographe, elle laisse toujours à désirer : le mot « Partie », figurant pourtant à maintes reprises dans l'énoncé, devient « PARTI ». En ce qui concerne les termes mathématiques, et les noms propres de mathématiciens, ce n'est pas mieux : comme par le passé, Riemann est déformé en « reiman », « reimanne », ou autres variantes, sans majuscule qui plus est. Quant à (Hermann Amandus) Schwarz, il est confondu avec (Laurent) Schwartz. Nous avons aussi – malgré ce qui figurait dans le rapport de l'an passé – retrouvé les sempiternelles abréviations : « cc » (pour *croissances comparées*), par exemple, ou la terminologie transformée : si on dit qu'une intégrale est impropre, on ne parle pas « d'impropreté », ni « d'intégrale propre ».

Certains résultats étaient donnés et il était demandé de les démontrer. De nombreux candidats ont essayé de « bricoler le résultat », en présentant une suite de calculs faux ou peu précis, pour arriver au résultat donné.

Nous rappelons également que les traits se tirent à la règle, et que les résultats doivent être encadrés.

Remarques particulières

Préambule

1. Dans cette première question, il fallait donner le domaine de dérivabilité des fonctions f et g et montrer que, pour tout réel t de ce domaine, les dérivées de f et g coïncident.

La majorité des candidats ont répondu correctement à cette question. Pour le domaine de dérivabilité des deux fonctions, un minimum de justification était attendu : les fonctions sont des fonctions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$. Parler de composition de fonctions a un sens lorsque l'on explique quelles sont les fonctions en jeu (la fonction inverse et la fonction $t \mapsto t - t_0$). De nombreux candidats ont donné ce domaine sans aucune explication, beaucoup ont expliqué que « les fonctions étaient définies et continues sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ et donc dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ ». Dans le même ordre d'idée, des candidats ont indiqué que le domaine était $\mathbb{R}$ puisque l'énoncé indiquait que t était différent de t_0 .

Des candidats n'ont pas su répondre à cette question, trouvant soit des dérivées opposées, soit des expressions exotiques, ou bien aucune expression du tout.

Nous signalons que de nombreux candidats confondent le symbole mathématique « privé de » $\setminus$ avec le *slash* $/$.

Enfin, il semble que certains candidats ne connaissent pas le sens du verbe *coïncider*. Plusieurs d'entre eux ont en effet écrit : « $f' = -g'$, donc f' et g' coïncident ».

2. La seconde question de ce Préambule demandait le tableau de variations de f sur $] -\infty, t_0[$ et sur $] t_0, +\infty[$, en précisant les limites aux bornes.

Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats. Nous rappelons que les bornes doivent figurer *sur le tableau de variations* et non à part.

Des candidats ont donné des tableaux aberrants, avec des fonctions croissantes de -1 à -1 , ou de 0 à 0 .

3. Cette question demandait de donner une équation de la tangente T à la courbe représentative de f en 0 .

De très nombreux candidats ne connaissent pas l'expression donnant la forme générale de l'équation de la tangente à une courbe donnée en un point.

D'autres écrivent « $\frac{t}{t_0}$ », au lieu de $y = \frac{t}{t_0}$. Nous avons aussi trouvé tout un lot de réponses de la forme « $T = \frac{t}{t_0}$ », « $f(t) = \frac{t}{t_0}$ », voire des expressions quadratiques, ce qui est ennuyeux lorsqu'il s'agit d'une droite.

4. La majorité des candidats ont correctement tracé la tangente T et l'allure du graphe de f sur $] -\infty, t_0[$ et sur $] t_0, +\infty[$. Beaucoup ont omis la tangente (bien précisée dans l'énoncé, et dont le tracé aide pour celui de la courbe). D'autres ont fait deux tracés distincts : un pour la (seule) tangente, un autre pour la (seule) courbe. L'asymptote verticale $x = 1$ et l'asymptote horizontale $y = -1$ ne figuraient pas sur un nombre important de tracés.
5. Cette question, qui demandait de montrer que, si n est un entier naturel non nul, la fonction f est n fois dérivable sur $] -\infty, t_0[$ et sur $] t_0, +\infty[$, et de donner, à l'aide d'une démonstration par récurrence, l'expression de sa dérivée $n^{\text{ième}}$, $f^{(n)}$, sur $] -\infty, t_0[$ et sur $] t_0, +\infty[$, a été correctement traitée par la majorité des candidats. Toutefois, un nombre non négligeable de candidats ont donné des réponses exotiques, avec des expressions impliquant des sommes avec des coefficients binomiaux, des puissances de 2 , des $(-1)^n$.
6. Si une grande partie (un quart) des candidats ont correctement déterminé une primitive G de g sur $] -\infty, t_0[$ et sur $] t_0, +\infty[$, beaucoup ont voulu donner une seule

réponse, sans utiliser de valeur absolue : $t \mapsto -t_0 \ln(t - t_0)$ ne peut pas convenir sur $] -\infty, t_0[$. Ou alors, la valeur absolue est utilisée sur $]t_0, +\infty[$, mais pas sur $] -\infty, t_0[$, ce qui donne l'impression que la notion de valeur absolue reste confuse, comme on le constate d'ailleurs dans la dernière partie du problème. Beaucoup de candidats ont omis le signe moins requis devant le t_0 en facteur du logarithme népérien.

En ce qui concerne la détermination d'une primitive F de f sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, elle n'a été correctement faite que sur peu de copies. Les candidats n'ont pas pensé à utiliser le fait que, pour tout réel $t \neq t_0$, $f(t) = -1 + g(t)$, et qu'il suffisait donc de primitiver la fonction constante égale à -1 et d'utiliser le résultat sur G . Nous avons trouvé sur beaucoup de copies des calculs extrêmement longs et compliqués, qui n'aboutissaient pas.

7. Cette question demandait un énoncé du cours : la formule de Taylor-Young à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de x_0 pour une fonction ψ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Cette question, très classante, n'a été traitée correctement que par à peine un quart des candidats.

Comme évoqué au début de ce rapport, de nombreux candidats ont écrit une égalité entre la fonction approchée et la partie principale (polynomiale) du développement limité ; pour d'autres, le terme d'erreur est en $\ll o(n) \gg$, $\ll o(\psi^n) \gg$. Certains n'ont pas compris que si le développement est (demandé) à l'ordre n , c'est parce que l'on s'arrête aux termes d'ordre n – en x^n – et non en x^{n+1} , et que le reste – le terme d'erreur – est un $o(x^n)$ et non un $o(x^{n+1})$ (et certainement pas un $o(x^k)$ si k est l'indice de sommation utilisé dans l'expression de la partie polynomiale), parce que justement il doit être négligeable devant le dernier terme en x^n du développement. Certains candidats ont écrit l'égalité entre le développement (ou sa partie principale) et $\ll \psi(x_0) \gg$, au lieu de $\psi(x_0 + h)$ ou $\psi(x)$.

8. Dans cette question, il était attendu que les candidats appliquent la précédente et donnent, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ (en détaillant la réponse, ce qui supposait de calculer la valeur des dérivées $k^{\text{ièmes}}$ en 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$, pour $0 \leq k \leq n$).

A peine plus d'un dixième des candidats ont répondu correctement à cette question. Beaucoup de candidats ont écrit une égalité entre $\frac{1}{1-t}$ et $\sum_{k=0}^n t^k$ (ou $\sum_{k=1}^n t^k$,

voire $\sum_{k=0}^n (-1)^k t^k$. Nous avons aussi trouvé des expressions avec des factorielles.

Enfin, de nombreux candidats écrivent le développement limité d'une fonction qui dépend de la variable t , en fonction d'une nouvelle variable x , sans doute par habitude, ce qui démontre un manque de rigueur et d'attention.

9. La dernière question de ce Préambule demandait de déduire de la précédente, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \ln(1-t)$.

Cette question a été mieux réussie que la précédente (environ la moitié des candidats). Il suffisait d'appliquer le théorème d'intégration des développements limités (ce qui n'a été que rarement justifié).

L'autre moitié restante des candidats ont donné des réponses sans le terme de reste en *petit o*, avec des expressions aberrantes (le logarithme népérien prenant des valeurs négatives sur $]0, 1[$) de la forme $-t - \frac{t^2}{2} - \dots$, ou encore $t - \frac{t^2}{2} - \dots$ ou $1 - t - \frac{t^2}{2} - \dots$.

Partie I

1. Cette première question, qui demandait de déterminer, sur $\mathbb{R}_+^*$ une primitive H de la fonction h telle que, pour tout réel strictement positif t :

$$h(t) = \frac{1}{t+t^2}$$

a été traitée correctement dans la grande majorité des copies, à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

Un nombre non négligeable de candidats ont donné une expression non simplifiée, de la forme $t \mapsto \ln(t+t^2) - 2 \ln(1+t)$.

2. Dans cette seconde question, il fallait, pour tout entier naturel $n \geq 2$, étudier la convergence de l'intégrale $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2}$, puis la calculer.

Là encore, cette question a été traitée correctement dans la grande majorité des copies. Si les candidats semblent bien maîtriser les techniques de comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, ce n'est pas le cas de la notion de *petit o* : ainsi, lorsque t tend vers plus l'infini, $\frac{1}{t+t^2}$ n'est absolument pas un « $o\left(\frac{1}{t+t^2}\right)$ ».

Dans un nombre important de copies, les candidats ont justifié la convergence de l'intégrale en montrant l'existence de la limite $\lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{t}{1+t} \right)$, ce qui est correct.

3. Cette troisième question demandait de donner, pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'expression de u_n en fonction de n .

Si cette question a, encore une fois, été correctement traitée par la majorité des candidats, un nombre non négligeable de candidats ont essayé de *reconstituer la réponse* à l'aide de l'expression finale donnée par l'énoncé, ce qui les a souvent conduits à des expressions aberrantes, où ils écrivent une égalité entre $-n \int_0^\pi \frac{\sin(nt) dt}{n + \cos(nt)}$ et $\ln(n + \cos(n\pi))$ et $\ln(n+1) - \ln n$, ou autres variantes.

4. La très grande majorité des candidats ont obtenu la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

S'il suffisait d'utiliser la composition des limites, une partie importante des candidats ont utilisé l'encadrement

$$\forall n \geq 1 : 1 - \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{(-1)^n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

puis le théorème des gendarmes.

Certains sont passés par un développement asymptotique.

Nous rappelons que $\ln 1 = 0$, et qu'il est mieux de donner la réponse simplifiée.

5. Dans cette question, on demandait de montrer que, si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries convergentes, alors $\sum (a_n + \lambda b_n)$ est une série convergente.

Cette question n'a été correctement traitée que par peu de copies. Il suffisait d'utiliser la linéarité des sommes partielles $\sum_{k=0}^n (a_k + \lambda b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \lambda \sum_{k=0}^n b_k$ et de passer à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini.

De très nombreux candidats manipulent les séries comme si elles étaient des réels : écrire une égalité entre $\sum (a_n + \lambda b_n)$ et $\ll \sum a_n + \lambda \sum b_n \gg$ n'a pas de sens.

Un nombre important de candidats ont voulu appliquer le critère spécial des séries alternées à $\sum u_n$, mais, ne maîtrisant pas cette notion, ils ont voulu montrer que la suite (u_n) était décroissante, sans prendre garde au fait que les termes de cette suite n'étaient pas tous positifs.

6. Dans cette question, pour étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ (où, pour tout entier naturel $n \geq 2$, u_n a été introduit à la question 3.), il suffisait d'utiliser le résultat de la question précédente.

Moins d'un dixième des copies ont traité correctement cette question. Beaucoup de candidats ont voulu raisonner sur l'équivalence entre u_n et $\frac{(-1)^n}{n}$, lorsque l'entier n tend vers l'infini, sans faire attention au fait que le signe des expressions concernées n'était pas constant.

La question de la convergence absolue a été mieux traitée.

7. (a) Dans cette question, on demandait de montrer que, pour tout entier naturel $N \geq 1$, la somme partielle S_{2N} valait $\ln \frac{2N+1}{2N}$.

Cette question a été correctement traitée par environ un quart des candidats. Si la solution naturelle consistait à découper la somme en séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs, un nombre important de candidats ont fait une démonstration par récurrence, ce qui était aussi possible.

Un nombre important de candidats ont parlé de « télescopage » (ce qui n'est pas une démonstration), et donné la réponse figurant dans l'énoncé, mais sans aucune justification. D'autres ont essayé de le montrer *à la main*, en explicitant les premiers termes de la somme. Enfin, certains ont cru qu'il fallait calculer $\sum_{k=1}^n u_{2k}$.

Nous rappelons aussi l'importance d'utiliser des parenthèses – de délimitation – dans des expressions de la forme

$$\sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k)$$

Souvent, les candidats écrivent « $\sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln k$ », ce qui n'est pas correct.

- (b) Dans cette question, on demandait de comparer, pour tout entier naturel $n \geq 1$, u_{2n+1} et u_{2n} .

Cette question n'a été correctement traitée que par moins d'un tiers des candidats. Il fallait simplement remarquer que u_{2n+1} et u_{2n} étaient opposés.

La majorité des candidats n'ont pas été au bout du calcul, se contentant d'écrire :
 $\ll u_{2n+1} = \ln \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \leq 0 \gg$ et $\ll u_{2n} = \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \geq 0 \gg$.

- (c) Dans cette question, il fallait déduire de la précédente, pour tout entier naturel $N \geq 2$, S_{2N-1} .

Environ un cinquième des candidats ont correctement répondu. S'il fallait *a priori* utiliser le fait que, pour tout entier k de, $\{1, \dots, N-1\}$, u_{2k} et u_{2k+1} étaient opposés, il était aussi possible d'utiliser la relation $S_{2N-1} = S_{2N} - u_{2N}$, ce qui a été fait par une grande partie des candidats ayant traité correctement la question.

Un nombre important de candidats ont écrit une égalité entre S_{2N-1} et $-S_{2N}$.

Cette question a permis de bien mettre en évidence que ceux qui « trouvaient » le résultat de la question (a) « par télescopage » n'avaient souvent pas bien compris, puisqu'ils ne l'appliquaient pas ici, ou mal.

- (d) Cette ultime question de la Partie I, où il fallait donner la valeur de la somme de la série considérée, a été correctement traitée par moins d'un cinquième des candidats.

Un nombre important de candidats ont donné une réponse juste sur la base de justifications fausses (comme, par exemple, une égalité entre S_{2N-1} et $-S_{2N}$.)

Partie II

1. Dans cette question, on fixait l'entier naturel non nul n , et on demandait d'étudier, pour tout réel $x > 1$, la convergence de l'intégrale $G_n(x) = \int_0^{+\infty} x^{-nt} t^n dt$.

Les candidats ont, le plus souvent, utilisé le fait que, lorsque t tend vers l'infini, l'intégrande est un $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Toutefois, il fallait le justifier à l'aide des croissances comparées, ce qui n'a pas toujours été fait. D'autre part, les candidats s'arrêtent

souvent au $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, sans rappeler le théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives et le fait que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente.

Si la moitié des candidats ont répondu correctement à cette question, nous avons trouvé beaucoup de réponses complètement fausses, où les candidats majorent l'intégrande par t^n et écrivent ensuite que $\ll \int_0^{+\infty} t^n dt$ (ou $\int_1^{+\infty} t^n dt$) converge $\gg$. De nombreux candidats ont écrit que, lorsque t tend vers l'infini, $x^{-nt} t^n$ était équivalent à x^{-nt} .

D'autres ont voulu majorer l'intégrande par e^{-t} ou $\frac{1}{t^2}$, ou encore écrire que l'intégrande était un $o(e^{-t})$.

Un nombre important de candidats ont donné des équivalents (parfois exotiques) ou des *petits o* sans aucune justification.

2. Cette question a aussi été traitée correctement par environ la moitié des candidats. Il fallait appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres (à condition de le citer), la majoration de l'intégrande pour tout réel x de $[a, +\infty[$ étant directement donnée par $G_n(a)$ et la question précédente, sous réserve bien sûr de l'écrire, ce qui n'a pas toujours été le cas, beaucoup de candidats se contentant d'écrire que $\ll \int_0^{+\infty} a^{-nt} t^n dt$ converge $\gg$ (sans détails, et même lorsque la question précédente n'a pas été correctement traitée).

Un nombre important de candidats domine le module de la fonction par une fonction positive (continue dans le meilleur des cas), mais ne disent pas qu'elle doit être intégrable. D'ailleurs, certaines fonctions de majorations proposées ne sont justement pas intégrables.

3. Cette question, où il fallait cette fois appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, a été correctement traitée par environ un quart des candidats. Certains appliquent le théorème, mais de façon *subliminale*, puisqu'aucune mention n'en est faite. De nombreuses copies ont des majorations de valeurs absolues par des quantités négatives, des majorations non explicitées par $\ll \varphi(t)$ qui est intégrable (et parfois dérivable) $\gg$. Pour les copies ayant obtenu la majoration correcte, un minimum de justification de l'intégrabilité de la fonction était attendue : soit parce que l'on avait directement $nG_{n+1}(a)$ et que l'on utilisait le résultat de la première question, ou alors, en appliquant à nouveau les croissances comparées pour montrer que l'on avait un $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente.

4. Dans cette question, il fallait montrer, à l'aide d'un changement de variable et d'une intégration par parties généralisée que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel $x > 1$:

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} G_n(x)$$

Environ un cinquième des candidats ont correctement traité cette question. Dans de nombreuses copies, les candidats ne font pas figurer le détail du calcul, il faut chercher le crochet ailleurs, ce qui ne va pas, nous l'avons déjà signalé à plusieurs reprises. Souvent aussi, ce crochet est mentionné nul, mais sans aucune justification.

Des candidats n'ont pas suivi l'indication de l'énoncé et ont voulu partir de l'expression de $G_n(x)$: si certains ont abouti au bon résultat, les autres se sont souvent perdus dans des calculs dantesques qui n'ont pas abouti.

Des copies ont *magiquement* fait apparaître le $\ln x$.

5. Dans cette question, il fallait calculer $G_1(x)$.

Cette question a été correctement traitée par un peu plus d'un sixième des candidats. Un nombre important de candidats ont donné une expression négative (ce qui est aberrant pour l'intégrale d'une fonction positive), ou encore $\frac{1}{x^2}$, ou 1, et même souvent, 0.

6. Cette question, où il fallait exprimer, pour tout réel $x > 1$ et tout entier naturel non nul n , $G_n(x)$ en fonction de n , a été correctement traitée par environ un dixième des candidats.

L'énoncé précisait bien qu'une preuve faisant intervenir explicitement une récurrence était attendue, mais un nombre important de candidats se sont contentés d'écrire *par récurrence évidente*.

Certains candidats ont donné le résultat en fonction de G_1 , mais d'autres ont conservé leur erreur de calcul sur G_1 , même quand la valeur trouvée était négative. Cela montre souvent un manque de recul.

Nous avons trouvé dans des copies, des expressions de la forme $\ll x \times -y \gg$, ce qui n'est pas correct.

7. Dans cette question, il fallait, dans un premier temps, en reconnaissant une série géométrique de raison $\frac{1}{\ln x}$, donner une condition nécessaire et suffisante de conver-

gence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n G_n(x)}{(n-1)!}$.

Un dixième des candidats ont correctement traité cette première partie de la question. Beaucoup de candidats ont bien écrit qu'il fallait $\frac{1}{\ln x} < 1$, mais ont ensuite donné $\ll \frac{1}{e} < x < e \gg$.

En ce qui concerne le calcul de la somme $S(x)$, beaucoup de candidats n'ont pas fait attention qu'il fallait sommer à partir de 1 les termes en $\frac{1}{(\ln x)^{n+1}}$, ce qui revenait à sommer à partir de 2 les termes en $\frac{1}{(\ln x)^n}$ (on pouvait aussi mettre en facteur le $G_1(x)$ de la question 5).

8. Dans cette huitième question, il fallait, à l'aide de la valeur de la somme de la série de la Partie I et de la continuité de la fonction G , calculer :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} G_N \left(e \prod_{k=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k} \right) \right)$$

Un peu plus d'un vingtième des candidats ont correctement traité cette question.

Partie III

1. Dans cette question, on demandait d'exprimer, pour tout couple (x, y) de réels distincts, la hessienne de la fonction de deux variables φ .

Un peu moins de la moitié des candidats ont correctement traité cette question. De nombreuses erreurs viennent d'un signe moins omis dans la dérivée croisée $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$,

ou rajouté dans l'expression de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ et/ou $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$.

Beaucoup de candidats ont fait des erreurs de signe car, comme évoqué précédemment, ils étaient visiblement gênés par la valeur absolue. Certains ont donné deux Hessiennes différentes, suivant que $x < y$ ou $y < x$.

2. Environ 60% des candidats ont montré que la fonction φ admet un point critique en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$x_0 = -y_0 = \frac{1}{2(x_0 - y_0)}$$

Si les candidats semblent bien connaître et maîtriser la notion de point critique, certains ont écrit que le gradient de la fonction φ était le scalaire $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

3. Environ un cinquième des candidats ont donné les valeurs possibles des réels x_0 et y_0 introduits à la question précédente. Certains ont donné une réponse partielle : $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, d'autres des réponses incomplètes ou non finalisées, de la forme « $x = \pm \frac{1}{2}$ », ou alors, avec des expressions impliquant des $\sqrt{4}$, non simplifiées en 2.
4. Très peu de candidats ont correctement montré que, pour les valeurs possibles de x_0 et y_0 obtenues à la question précédente, la fonction φ admettait un minimum local en (x_0, y_0) .

Certains candidats ont très proprement utilisé un développement limité d'ordre 2 au voisinage de (x_0, y_0) , montrant une parfaite compréhension de la notion de minimum local et des conditions correspondantes sur les valeurs propres de la matrice hessienne.

Mais souvent, l'expression fautive de la matrice hessienne ne permet pas d'obtenir le bon résultat. Ou alors, la réponse n'est pas finalisée (pas de calcul du déterminant et de la trace de la matrice).

5. Dans cette dernière question, plus délicate, il fallait déjà montrer que le minimum local $\varphi(x_0, y_0)$ était un minimum global (par exemple, en étudiant les limites de φ aux bords du domaine d'étude). Certaines très bonnes copies l'ont fait.

Pour le reste, une partie des candidats ont bien compris l'interprétation demandée sur le $\mathcal{O}(N)$.