

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques B

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *correcteur* désignera une correctrice ou un correcteur.

Remarques générales

Le sujet de cette année était composé de 2 exercices :

- Le premier exercice se proposait de démontrer qu'un endomorphisme défini sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ était une rotation.
- Le deuxième exercice étudiait une conique définie par un foyer, une directrice et son excentricité en utilisant les nombres complexes puis s'intéressait à deux surfaces contenant cette conique.

L'épreuve abordait une part importante du programme de géométrie à l'exception des courbes paramétrées (pour faire un sujet de longueur raisonnable) ainsi que du programme d'algèbre de PTSI/PT à l'exception de la réduction, qui était évaluée dans l'épreuve de Mathématiques A.

La grande majorité des candidats a traité l'ensemble du sujet, même si les dernières questions de chaque exercice sont régulièrement laissées de côté. On compte d'ailleurs de nombreuses copies ayant obtenu une excellente note.

L'épreuve a permis de bien discriminer les candidats sur l'ensemble du spectre des notes.

Présentation des copies

Les correcteurs ont constaté pour cette session une nette diminution du nombre de copies dans lesquelles les résultats sont clairement mis en valeur à l'aide d'un encadrement, et ils rappellent aux candidats que les traits doivent être tracés à l'aide d'une règle.

En revanche, la plupart des candidats ont fait l'effort de rayer proprement les résultats qu'ils jugeaient erronés ... même si ces ratures restent parfois un peu trop nombreuses : les candidats doivent apprendre à utiliser une feuille de brouillon.

De plus, la maîtrise de la langue française demeure insuffisante dans un nombre significatif de copies : accords genre et nombre, confusion infinitif/participe passé et même parfois imparfait, verbes conjugués et adjectifs... ce qui rend certaines phrases incompréhensibles.

L'orthographe des termes mathématiques comme ellipse, parabole, hyperbole, cartésienne, tangente devrait être connue, à plus forte raison lorsque ceux-ci figurent dans l'énoncé.

Comme indiqué sur le sujet, les illustrations graphiques pertinentes sont valorisées lorsqu'elles accompagnent efficacement le raisonnement ou facilitent la lecture de la copie.

Rédaction

Les membres du jury rappellent aux (futurs) candidats que pour réussir une épreuve de concours, il est impératif de connaître et maîtriser son cours. Les théorèmes et propriétés ne se réduisent pas à une conclusion mais comportent également une ou plusieurs hypothèses qu'il convient de vérifier. De plus, lorsqu'il y a plusieurs hypothèses, et que chacune nécessite plusieurs lignes de justifications, il convient de faire une phrase les rassemblant toutes avant d'écrire la conclusion.

Quelques points particuliers concernant ce sujet :

◊ Les candidats qui utilisent dans une question un résultat obtenu dans une question précédente doivent rappeler le numéro de la question où celui-ci a été obtenu et en cas de nécessité, vérifier que les hypothèses nécessaires sont présentes.

◊ Une démonstration ne se limite pas à une suite de calculs : une conclusion explicite est attendue.

◊ Les notations introduites par les candidats doivent être clairement définies et, autant que possible, ne pas entrer en conflit avec celles de l'énoncé.

◊ Les candidats doivent porter une attention particulière à la nature des objets manipulés (vecteurs, polynômes, applications linéaires, matrices, courbes, surfaces...) : les confusions entre ces divers objets mathématiques ont été à l'origine de nombreuses erreurs.

◊ Les raisonnements par implication et par équivalence restent mal maîtrisés dans un nombre important de copies : les candidats confondent « si ... alors », « pour que ..., il faut que » et « si et seulement si » et utilisent les symboles $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$ sans en comprendre le sens.

D'autres remarques et conseils concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question ci-après.

Premier exercice.

Partie A

1. La caractérisation d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel usuel (à préciser) reste insuffisamment maîtrisée, et lorsqu'elle est connue, sa mise en œuvre est souvent laborieuse, en particulier les correcteurs voient des « $\in H$ » sans sujet (et là où ils sont, le sujet ne semble pas être un polynôme).

Ceux qui utilisent un « sous-espace vectoriel engendré par » s'en sortent mieux.

Les correcteurs n'ont pas compris pourquoi un certain nombre de candidats ont fait intervenir la fonction f .

Quant à la base, elle n'est pas toujours justifiée et des candidats assez nombreux ont proposé comme base, la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Par ailleurs, les bases de H sont constituées de polynômes (appartenant à H) et pas de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

2. La définition d'une application linéaire est bien connue (même s'il n'est pas utile de vérifier $f(0) = 0$).

En ce qui concerne l'ensemble d'arrivée, seuls 2 candidats sur 5 répondent correctement. A noter que 1 sur 5 répond H .

3. La définition d'un endomorphisme est moins maîtrisée que celle d'une application linéaire. Certains candidats confondent ces deux notions et donc démontrent la linéarité que le sujet demandait d'admettre.

Certains candidats ne lisent pas attentivement l'énoncé et démontrent que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

Pour les autres, ils partent bien de $P \in H$ mais certains ne se rendent pas compte qu'en réalité, ils prennent $P \in \mathbb{R}_3[X]$; d'autres démontrent uniquement que $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$ ou que $6P(0) = P^{(3)}(0)$.

Rares sont les candidats qui exploitent la base de H trouvée à la question 1.

Enfin, pour quelques candidats $((X + X^2)P'(0))' = (1 + 2X)P'(0) + (X + X^2)P''(0)$.

Partie B

4. Globalement, les candidats citent « bilinéaire, symétrique et définie positive » (et non positive et définie). Il n'était pas demandé d'explicitier les termes utilisés (ce n'est d'ailleurs pas toujours juste lorsque c'est fait).
En revanche, les domaines de définition et d'arrivée de φ étaient attendus. Ils sont rarement donnés et quand ils le sont, il y a régulièrement $\mathbb{R}_3[X]$ soit comme ensemble de départ, soit comme ensemble d'arrivée.
Des candidats confondent la définition d'un produit scalaire avec un exemple de produit scalaire.
5. Il s'agissait ici de démontrer un résultat, qui ne figure plus explicitement au programme, mais qui est utilisé par la grande majorité des candidats lors de la démonstration d'un produit scalaire.
Il y a les candidats qui se contentent de réécrire l'énoncé (en changeant « première variable » par « à gauche », ce qui n'était évidemment pas ce qui était attendu).
Les démonstrations sont parfois incomplètes et/ou confuses, en particulier lors de l'utilisation du caractère symétrique.
6. La démonstration faisant appel aux coefficients est généralement bien réussie. L'utilisation de la formule de Taylor pour les polynômes a été appréciée.
Celle faisant appel aux racines est bien moins souvent proposée et quand elle l'est, elle manque régulièrement de précisions : 4 racines (sous entendu distinctes ?) ou une infinité de racines, lesquelles ne sont pas données.
On rappelle qu'un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ n'est pas nécessairement de degré 3 et que la phrase « un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ possède au plus 3 racines » est fausse si on ne précise pas que le polynôme est non nul.
7. Question souvent bien réussie, même si certains candidats oublient de démontrer le caractère unitaire ou confondent vecteur unitaire avec polynôme unitaire.
Quant aux candidats qui ont souhaité utiliser les vecteurs des coordonnées dans la base canonique, ils devaient s'assurer que le produit scalaire proposé correspondait au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^4$, ce qui n'a jamais été fait.
Il ne fallait pas oublier de signaler que les deux vecteurs proposés appartenaient à H .
8. À quelques exceptions près, l'ordre demandé pour les éléments de la base a été respecté.
Beaucoup de candidats ont voulu utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Cela était possible mais parmi les candidats qui l'appliquent à $(X, X^2, 1 + X^3)$, beaucoup refont tous les calculs sans exploiter la question précédente. Quant à ceux qui l'appliquent à $(1 + X^3, X^2, X)$, ils ne se rendent pas compte que si cette base n'avait pas été déjà orthogonale, ils n'auraient pas pu obtenir la base demandée.
9. (a) Cette formule semble un peu mieux connue qu'il y a deux ans, mais reste encore trop peu connue. Les correcteurs incitent les candidats à la donner (en définissant leurs notations) même s'ils n'ont pas réussi à répondre à la question précédente.
(b) Les correcteurs constatent des confusions entre « une base de l'orthogonal de H » et « une base orthogonale de H ».
Il ne fallait pas oublier de justifier la dimension de l'orthogonal de H .

Partie C

10. Il n'est pas rare que la recherche de $\mathcal{B}'$ prenne plus d'une page... La base proposée n'est pas toujours orthogonale (ni même parfois une base), ou orthonormale et/ou directe.
On constate des confusions entre la matrice de r dans une base adaptée et la matrice de passage

de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}'$. Dans ce cas, la matrice dans la base adaptée est souvent celle que les candidats donnent à la question suivante.

À quelques exceptions près, les candidats ont fait attention à la position du vecteur dirigeant l'axe.

11. Les formules de changement de base associées aux endomorphismes restent trop souvent mal connues ou mal utilisées.
12. Bien que l'on pouvait traiter cette question sans faire les précédentes, elle a été peu traitée, sans doute à cause de sa position.
Les angles ne n'ont pas toujours été simplifiés et la symétrie orthogonale par rapport à Δ pour R^{2026} est peu citée et quand elle l'est, il manque « orthogonale » ou est qualifiée de « réflexion ».

Partie D

13. Quelques soucis de gestion de $\sqrt{2}$ pour les candidats ayant trouvé $\mathcal{B}'$.
Certains candidats proposent des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et même des matrices non carrées, et aucun ne signale qu'il doit y avoir un problème compte tenu de la question suivante.
14. Peu traitée dans la mesure où la plupart des candidats n'avaient pas les résultats nécessaires pour le faire.
Plutôt réussie dans les autres cas.

Deuxième exercice.

Partie A Cette première partie proposait 3 questions de cours.

Seuls 6% des candidats ont obtenu la totalité des points de cette partie.

1. 20% des candidats ont eu la totalité des points de cette question de cours.
Il semble que la plupart ne connaissent ni le mot « paramétrage », ni l'expression « branche d'une hyperbole ».
Dans le paramétrage, il ne faut pas oublier le domaine où évolue le paramètre.
2. 22% des candidats ont eu la totalité des points de cette question de cours.
3. 23% des candidats fournissent une réponse complète à cette question de cours.

Partie B

4. (a) Les caractérisations d'une projection orthogonale sont mal connues. Il était possible de passer par la formule de la projection vectorielle à condition d'utiliser le vecteur $\overrightarrow{AM}$ avec $A \in \mathcal{D}$ et non le vecteur $\overrightarrow{OM}$.
(b) Très peu traitée même par les candidats ayant réussi la question précédente.
5. Si tous les candidats qui traitent la question remplacent z' par le résultat de la question précédente (sans le dire), presque aucun des candidats (20%) ayant remplacé z par $z + \bar{z} e^{i\frac{\pi}{3}} - 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ n'a expliqué pourquoi.
On compte également des erreurs dans le développement de $-z'$.
6. Vu le résultat de la question 2., cette question ne pouvait pas être réussie. Ceux qui ont réussi à faire le lien avec la question 2. n'ont pas toujours trouvé le foyer.
Les candidats qui donnent une nature de conique au hasard (ce qui, juste ou pas, ne rapporte aucun point) devraient au minimum vérifier qu'ils proposent la même nature à la question 8.c.

Partie C

7. Il fallait commencer par (re)donner un vecteur $\vec{u}$. On note dans certains cas, des confusions claires entre vecteur normal et vecteur directeur ; dans d'autres cas, on ne sait pas s'il s'agit de la même confusion ou d'un énoncé mal lu.
Connaitre le cosinus d'un angle ne suffit pas à trouver cet angle. Les valeurs usuelles de la fonction arccosinus doivent être connues : les candidats ne devraient pas répondre $\alpha = \arccos(\frac{1}{2})$ et encore moins $\alpha = \arccos(\sqrt{3})$.
8. (a) Deux éléments à noter dans cette question : les candidats oublient soit de raisonner par équivalence soit de justifier leurs équivalences et le conjugué de $e^{i\alpha}Z$ n'est pas toujours correct.
De plus, dans certaines copies, il est très difficile pour le correcteur, et même parfois pour le candidat, de faire la différence entre z et Z .
- (b) Très peu traitée. Il semble que les candidats soient mal à l'aise avec les nombres complexes et encore plus avec le module d'un nombre complexe.
Les équivalences sont souvent oubliées.
- (c) Certains candidats se lancent dans des calculs inutilement longs (et régulièrement erronés) sans analyser au préalable la structure de la matrice étudiée.
Sauf indication contraire des candidats, les correcteurs ont considéré que les équations et coordonnées étaient données dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
Il est bien difficile, dans la plupart des copies, d'obtenir et/ou de trouver les trois éléments demandés.
- (d) Cette question est bien moins réussie que la question 11.b., alors qu'il s'agissait du même principe. Il y a manifestement des confusions avec les tangentes des courbes paramétrées.
Dans une équation de droite, il y a un signe égal ($=$). Par ailleurs, les équations doivent être données sous la forme $ax + by = c$ (ou $ax + by + c = 0$) et doivent être simplifiées.
9. (a) Certains candidats ne respectent pas l'unité imposée.
Tous les candidats qui n'ont pas fait apparaître de repère ou de graduations claires sur les axes ont été pénalisés et cette année, ils ont été très nombreux.
Enfin, il serait souhaitable que la courbe se rapproche de ses asymptotes.
- (b) Il manque très souvent le centre de la rotation et les candidats ont souvent hésité entre α et $-\alpha$ pour l'angle

Partie D

10. Les réponses à cette question sont très mal rédigées, à tel point que parfois les correcteurs se demandent si les candidats ne sont pas en train de démontrer que $S \subset \mathcal{C}''$. Il y a d'ailleurs des copies dans lesquelles les candidats ont démontré (à l'aide d'équivalents) que $S = \mathcal{C}''$.
11. (a) Même s'il y a des confusions entre point régulier et point singulier (et non point irrégulier), la plupart des candidats savent ce qu'il faut faire dans cette question, mais comme déjà souligné l'an dernier, l'équivalence $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$ est fausse. De plus, le raisonnement par équivalence ne va pas jusqu'au bout et les candidats ne vérifient pas que $O \in S$. Enfin, il y a trop souvent comme conclusion : « Les points réguliers de S sont $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ ».
- (b) Même remarque que l'an dernier pour cette question : la grande majorité des candidats a désormais compris qu'il fallait savoir trouver une telle équation.
Les correcteurs rappellent qu'ils veulent une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ (ou

$ax + by + cz = d$) avec des coefficients les plus « simples possibles ». La division par 6 a très souvent été faite, celle par -6 un peu moins.

12. (a) Les réponses ont rarement abouti à un résultat exploitable car les candidats n'ont pas d'objectifs (comment reconnaître un cercle), ils ne raisonnent pas par équivalence ou laissent tomber l'équation du plan, et $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ est identifiée comme l'équation d'un cercle et non d'une sphère.

Rares sont les candidats ayant fait le changement de base, mais ils sont arrivés au résultat (malgré des calculs pas toujours justes car faits un peu trop rapidement, faute sans doute de temps).

À noter que $\mathcal{C}_0 = \{O\}$ et donc n'était pas vide.

- (b) Toute affirmation doit être accompagnée d'une justification adaptée ; une réponse isolée (« oui » ou « non ») ne peut être prise en compte. Souvent les candidats qui répondent « non », donnent une justification qui exclut la sphère des surfaces de révolution.

Certains candidats ont donné un contre-exemple graphique, ce qui a été accepté, même si les correcteurs auraient préféré une explication utilisant la définition (ou une caractérisation) d'une surface de révolution.

13. Cette dernière question n'a été abordée que par un nombre très limité de candidats et seule une poignée d'entre eux a vu la condition $x \geq 1$.