

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *correcteur* désignera une correctrice ou un correcteur.

Remarques générales

Le sujet de cette année était composé de 4 parties :

- La première partie consistait à étudier la réduction de matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur des exemples d'abord, et le cas général ensuite.
- La deuxième partie étudiait un couple de variables aléatoires finies à l'aide de calcul matriciel.
- La troisième partie s'intéressait principalement à la probabilité pour une matrice construite sur le modèle de celles de la partie A d'être (ou non) inversible et comprenait une question d'informatique.
- Enfin, la quatrième partie s'intéressait au lien entre l'indépendance de deux variables aléatoires finies et le rang de la matrice associée à leur loi conjointe.

L'épreuve abordait une part importante du programme de probabilités de PTSI/PT. Si dans ce sujet, l'algèbre se limitait à la réduction de matrices, tous les thèmes d'algèbre ont été abordés sur l'ensemble des deux épreuves de Mathématiques A et Mathématiques B.

La grande majorité des candidats a traité les trois premières parties, la quatrième a joué son rôle en permettant aux candidats les plus performants de faire la différence.

L'épreuve a donc permis de classer l'ensemble des candidats, même si le nombre de copies très faibles est bien plus important que dans les deux autres épreuves. Cela est dû, entre autres, au fait que 4 à 5% des candidats traitent uniquement la partie A du sujet et qu'ils sont également nombreux à n'effectuer dans la partie B que les calculs matriciels et à ne traiter dans la partie C que les trois questions de cours sur les lois usuelles (souvent avec un taux de réussite très faible).

Présentation des copies

Les correcteurs ont constaté pour cette session que, globalement, les candidats rayent proprement leurs tentatives infructueuses... même si ces ratures restent parfois un peu trop nombreuses : les candidats doivent apprendre à utiliser une feuille de brouillon.

Par ailleurs, le nombre de copies où les résultats sont encadrés est en nette diminution et il est rappelé aux candidats que cela doit se faire à l'aide d'une règle.

De plus, la langue française est malmenée dans de nombreuses copies : accords genre et nombre, confusion infinitif/participe passé et même parfois imparfait, confusion entre « son » et « sont »... ce qui rend certaines phrases incompréhensibles.

Enfin, il est rappelé aux candidats que les noms propres s'écrivent avec une majuscule et que ceux-ci doivent être correctement orthographiés : (Jacques ou Jakob) Bernoulli, (Isaac) Newton, (Irénée-Jules) Bienaymé, (Pafnouti) Tchebychev, (Siméon Denis) Poisson (les trois derniers étant écrits dans l'énoncé).

Rédaction

Les membres du jury rappellent aux (futurs) candidats que pour réussir une épreuve de concours, il est impératif de connaître et maîtriser son cours. Les théorèmes et propriétés ne se réduisent pas à une conclusion mais comportent également une ou plusieurs hypothèses qu'il convient de vérifier. De plus, lorsqu'il y a plusieurs hypothèses, et que chacune nécessite plusieurs lignes de justifications, il convient de faire une phrase les rassemblant toutes avant d'écrire la conclusion.

Quelques points particuliers concernant ce sujet :

- Les candidats qui utilisent dans une question un résultat obtenu dans une question précédente doivent rappeler le numéro de la question où celui-ci a été obtenu et en cas de nécessité, vérifier que les hypothèses nécessaires sont présentes.

- Il ne faut pas oublier la conclusion lorsque les calculs sont finis.

- Les candidats abusent de l'abréviation « proba ». D'une façon générale, les candidats ne doivent pas utiliser d'abréviations.

- Les candidats doivent définir leurs notations, en particulier celles des sous-espaces propres et de la multiplicité d'une valeur propre : on dépasse la douzaine de notations différentes pour l'ensemble de ces deux notions.

- Les arguments manquent de précision (ou sont pleins de sous-entendus) : « Le polynôme admet 2 racines » (sous-entendu : distinctes et/ou réelles), « Le polynôme admet 2 racines complexes » (sous-entendu : non réelles), « Le polynôme admet 2 racines complexes conjuguées » (sous-entendu : distinctes)... ce qui posait problème dans ce sujet, puisque c'est sur ces précisions que reposait l'essentiel des justifications.

- les candidats confondent « si ... alors », « pour que ... », « il faut que » et « si et seulement si » ainsi que les signes et termes mathématiques correspondants.

- on lit souvent « par critère nécessaire et suffisant de », « par critère suffisant de » et même l'ambigüe « par critère non nécessaire et suffisant de ». Dans la mesure où il n'y a pas unicité de tels critères, cela ne peut être considéré comme une justification. Il en est de même pour « par théorèmes généraux ».

- En ce qui concerne les sous-espaces propres :

- ◊ Les candidats utilisant un système introduisent désormais leurs systèmes. Mais il est encore constaté des produits entre un espace vectoriel et un vecteur, des égalités ou des équivalents entre un système/une matrice/un vecteur/un espace vectoriel.

- ◊ Les candidats utilisant les opérations sur les colonnes de la matrice oublient trop souvent de justifier la dimension du sous-espace propre (soit à l'aide du rang de la matrice, soit avec la multiplicité de la valeur propre). Par ailleurs le théorème du rang matriciel fait apparaître la dimension de $\mathbb{K}^n$ et non celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et encore moins celle de M_1 qui n'existe pas.

- Entre deux événements, on doit trouver des symboles tels que « = » ou « $\subset$ » mais pas « $\Leftrightarrow$ » ou « $\Rightarrow$ ». De même, entre deux probabilités, on ne devrait trouver ni signe $\cap$, ni signe $\cup$ (de très nombreuses intersections de probabilités ont été écrites dans les copies).

- Les fractions doivent être mises sous forme irréductible. On rappelle à ce sujet, la phrase suivante qui figurait dans le rapport de jury 2024 : « Les auteurs des sujets se réservent la possibilité de prévoir dans le barème une pénalité pour les candidats qui ne simplifient pas les fractions (ainsi que les racines carrées), avec une tolérance pour les lois de probabilités où toutes les probabilités pourront être laissées au même dénominateur (le plus petit possible). »

D'autres remarques et conseils concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question ci-après.

Partie A : Quelques matrices

1. La propriété est connue par un peu moins des deux tiers des candidats. Malheureusement, uniquement la moitié de ceux-ci la présente avec un « si et seulement si », ce qui correspond au terme « caractérisation ».
2. Cette question est relativement bien réussie (aux sous-entendus près signalés dans le paragraphe rédaction).
On trouve des copies dans lesquelles il est écrit « M_2 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ donc n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$ ».
Les candidats ont parfois oublié de répondre à l'une des deux questions sur la diagonalisation.
3. Cette question est nettement moins bien réussie. En particulier de très nombreux candidats, bien qu'ils aient affirmé que M_2 est diagonalisable, n'essayent pas de déterminer P_2 et même certains affirment que P_2 n'existe pas.
4. (a) Dans cette question également, il manque souvent la réponse à l'une des deux parties de la question.
Les correcteurs trouvent trop souvent « 3 est valeur propre double donc M_3 n'est pas diagonalisable » ou « M_3 n'a qu'une valeur propre donc M_3 n'est pas diagonalisable ».
D'ailleurs la condition « le polynôme caractéristique est scindé (et non scindable) à racines simples » est régulièrement présentée comme une condition nécessaire et suffisante et les correcteurs sont amenés à s'interroger sur le fait de savoir si les candidats connaissent la définition d'un polynôme scindé ainsi que la différence entre un polynôme scindé et un polynôme scindé à racines simples.
On trouve dans quelques copies qu'une matrice diagonalisable n'est pas trigonalisable.
(b) La question est souvent non traitée. Les correcteurs constatent que les formules de changement de base et/ou que la construction d'une matrice d'un endomorphisme dans une base donnée sont mal connues.
Les candidats ayant trouvé une base convenant ont souvent oublié de justifier qu'il s'agissait bien d'une base.
5. Une très grande majorité des candidats donne la condition attendue, à l'exception notable de ceux qui ne font pas le calcul du déterminant de $M(a, b)$, mais plus du tiers des candidats la présente comme une condition suffisante, plus rarement comme une condition nécessaire.
Ce problème va se répercuter dans la partie C puisque une phrase en « si ... alors » ne permet pas d'écrire une égalité entre les (probabilités des) événements ($M(A, B)$ est inversible) et ($A \neq B$).
6. Probablement la question la mieux réussie du sujet. La plupart des erreurs proviennent du développement de $(X - a)(X - 1)$, de $-4(a - b)$ ou de $-(-1)(-b)$.
7. (a) Les candidats ayant cherché le sous-espace propre associé à la valeur propre double ont parfois divisé par b ou $a - 1$ sans se préoccuper d'étudier le cas $b = 0$ ou $a = 1$.
Si la matrice $M(a, b)$ est diagonalisable alors elle est semblable à λI_2 où λ est la valeur propre double et non à I_2 .
Beaucoup de candidats écrivent, sans s'en rendre-compte, que la matrice I_2 n'est pas diagonalisable.
(b) Plus du tiers des candidats a fait l'impasse sur cette question... Et ils sont encore moins nombreux à avoir eu la totalité des points...
Là encore, les réponses sont souvent incomplètes
8. Deux facteurs ont rendu cette question pénible à corriger : les candidats ont écrit la légende sur la page 6 et le dessin figurait sur la page 22 et certains ont tout mis de la même couleur.

Par ailleurs, un nombre très important de candidats ne fait figurer ni repère, ni graduation sur les axes, ce qui est pénalisé.

Si les points associés aux matrices M_1 , M_2 et M_3 ainsi que la droite correspondant aux matrices non inversibles ont été bien placés, il n'en est pas de même pour la parabole associée aux matrices non diagonalisables, souvent non tracée et quand elle l'était, elle ne passait pas toujours par le point associé à M_3 .

Enfin, les correcteurs constatent que de nombreux candidats ont utilisé les deux pages de la feuille de papier millimétré fournie, l'une des pages étant raturée. Pour ce type de question aussi, il convient de savoir utiliser une feuille de brouillon, ne serait-ce que pour positionner l'origine du repère et choisir une unité adaptée.

Partie B : Un couple de variables aléatoires

1. (a) Le sujet demandait d'établir une formule puis d'effectuer un calcul. Les candidats qui ont déterminé la loi par une autre méthode et qui ont ensuite comparé avec le calcul matriciel n'ont donc pas respecté les consignes de l'énoncé et ont été pénalisés.

Par ailleurs, contrairement à ce que pensent de nombreux candidats, déterminer la loi marginale d'une des deux variables d'un couple ne consiste pas à additionner les cases de chaque ligne ou de chaque colonne d'un tableau. Pour déterminer ces lois, il convient de citer la formule des probabilités totales (parfois écrite sans être nommée) et il est indispensable de donner le système complet d'événements utilisé.

Un système complet d'événements ne peut pas être égal à $X(\Omega)$, X , (X, Y) ou $\{x_1, x_2, x_3\}$. La formule des probabilités totales est un incontournable des sujets de probabilités. Aussi, les correcteurs conseillent fortement aux futurs candidats d'apprendre à écrire et utiliser correctement cette formule.

- (b) Cette question est un peu mieux réussie que la précédente, en particulier par rapport à l'ordre demandé.

Certains candidats s'étonnent de trouver une espérance négative, d'autres confondent la définition de l'espérance avec le théorème de transfert.

A noter que le nombre de candidats proposant pour l'espérance de X un vecteur, sans que cela les trouble, est non négligeable.

2. Les correcteurs ont régulièrement trouvé dans les copies des produits qui n'existent pas comme $UV...$

Les copies des candidats ayant reconnu que la loi de Y est la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ ont été valorisées.

3. Les justifications sont souvent absentes. De plus de nombreux candidats parlent de l'espérance (ou de la variance) du couple (X, Y) , ce qui n'existe pas... et écrivent en dessous $E(X, Y)$.

On ne devrait pas trouver dans les copies des écritures comme $-\frac{1}{12} - 0 \times -\frac{1}{12}$.

4. L'expression de l'espérance en fonction de $E(XY)$, $E(X)$ et $E(Y)$ n'est connue que par 2 candidats sur 5...

5. Seul 1 candidat sur 5 propose deux méthodes distinctes. Donner deux couples (x_i, x_j) pour lesquels $P(X = x_i, Y = y_j) \neq P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$ ne représente pas deux méthodes distinctes, de même que $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ et $E(XY) \neq E(X)E(Y)$.

Le lien entre la covariance et l'indépendance est mal connu, il est régulièrement présenté comme une condition nécessaire et suffisante.

6. Une justification minimale était attendue. Par ailleurs, les candidats ne devraient pas encadrer $\text{tr}(C) = \frac{4}{12}$.

Partie C : Des variables aléatoires dans une matrice.

1. (a) Nombreux sont les candidats qui ne se rendent pas compte que le calcul a déjà été effectué à la question précédente et qui le recommencent ou qui inversement, traitent correctement cette question et ne se rendent pas compte qu'il ont ainsi répondu à la question précédente.
(b) Les candidats qui traitent cette question s'intéressent à $P(\Delta(A, B) = 0)$ mais rares sont ceux qui étudient les différents cas possibles et pour ceux qui le font, il manque souvent des cas (erreur de calculs ou confusion entre $<$ et $\leq$).
Plus rares ont été les candidats qui se sont trompés de coefficients dans la matrice ou qui ont considéré que tous les événements élémentaires étaient équiprobables.
2. On a très souvent $P(A = B) = \sum_{k \in H} P(A = k, B = k) = \sum_{k \in H} P(A = k)P(B = k)$.
Si la seconde égalité est bien justifiée, la première n'est presque jamais justifiée.
Nombreux sont les candidats qui vont refaire cette démonstration dans les questions 3 et 5.
3. (a) 39% des candidats uniquement donnent une réponse correcte à cette question de cours.
Les candidats sont invités à définir q .
(b) 46% des candidats uniquement donnent une réponse correcte à cette question de cours.
Les candidats sont invités à respecter les notations de l'énoncé.
(c) Le manque de bonnes réponses aux questions précédentes a conduit de nombreux candidats à ne pas avoir les bonnes bornes sur la somme. De plus, la formule du binôme de Newton n'est pas maîtrisée et on constate également des confusions avec la factorisation de $a^n - b^n$.
4. (a) 51% des candidats uniquement donnent une réponse correcte à cette question de cours.
(b) Que les candidats aient utilisé les fonctions génératrices ou déterminé directement la loi, ils ont trop souvent oublié de citer (et donc de justifier) l'indépendance des variables aléatoires A et C . En revanche, ceux qui l'ont citée, l'ont généralement bien justifiée.
Il n'était pas utile de faire appel à un produit de Cauchy, (surtout en oubliant les hypothèses) pour calculer le produit des deux fonctions génératrices.
(c) Question qui pouvait être faite en admettant le résultat précédent... et pourtant moins d'un candidat sur deux l'aborde.
5. Trop de candidats utilisent le résultat de la question 2 sans le rappeler... ou refont la démonstration.
6. (a) Les valeurs absolues sont mal gérées et finissent souvent par disparaître sans justification.
Si la plupart du temps, les candidats ont bien compris qu'il fallait comparer au développement en série entière de la fonction exponentielle, ils n'ont pas toujours écrit les inégalités dans le bon ordre et/ou fait attention à la borne inférieure des sommes de séries utilisées.
(b) Deux points à noter en ce qui concerne le langage PYTHON :
 - Nombre de candidats ne semblent pas connaître la syntaxe `from module import f, g, ...`. Cela fait pourtant partie des 3 méthodes exigibles d'importation d'un module ;
 - `range(eps)` renvoie un message d'erreur dès lors que `eps` n'est pas un entier naturel.

Par ailleurs, commenter un programme ne consiste pas à le paraphraser. Les correcteurs attendent que les candidats leur expliquent la démarche suivie ainsi que le rôle de chaque variable (en particulier celles dont le nom n'est pas explicite.)

On note de nombreuses erreurs dans les initialisations, le placement de l'instruction `n = n+1` ou le sens de l'inégalité dans le test d'arrêt de la boucle `while`.

Par ailleurs, il est étrange de noter que dans un certain nombre de copies, il est créé une

initialisation artificielle qui oblige le programme à exécuter au moins une fois les instructions de la boucle `while`.

Enfin, les correcteurs n'ont pas du tout compris pourquoi, dans de très nombreuses copies, le test d'arrêt portait sur la différence entre 2 termes consécutifs d'une suite (pas toujours la même...)

- (c) Il n'est pas très utile d'écrire une fonction si on ne sait pas s'en servir... et les correcteurs remarquent que c'est le cas de nombreux candidats (y compris parmi ceux qui ont répondu à la question précédente).

On ne peut pas écrire avec un clavier d'ordinateur `val_app(10-5)`.

Il est rappelé aux futurs candidats que la fonction `print` fait partie des fonctions exigibles. Comme il n'était pas précisé dans le sujet si l'instruction devait être écrite dans l'éditeur ou la console, son absence n'a pas été pénalisée.

- 7. (a) Il serait souhaitable que les candidats justifient toutes les lois même lorsque l'énoncé ne le demande pas.

Une loi de Bernoulli se justifie grâce à son univers image et le paramètre doit être justifié à l'aide de $P(J_i = 1)$.

- (b) La coquille sur l'indice de la somme définissant K_N n'a nullement gêné les candidats puisque tous ceux qui ont reconnu la loi de la question précédente ont donné la bonne loi ici.

Il était attendu que soit citée la propriété du programme suivante (en adaptant aux notations du sujet) : « Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p , alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p ». Cette propriété a été peu citée.

A la place, on trouve un discours plus ou moins compréhensible, dans lequel :

les correcteurs ont du mal à trouver le mot « indépendant(e) » - sans parler de sa justification ;

K_N est qualifié de (somme de) loi(s), de (succession d') expérience(s) aléatoire(s) alors que c'est une variable aléatoire ;

les expériences aléatoires, les succès/échec ne sont pas précisés...

- (c) L'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale et la linéarité de l'espérance sont bien connues des candidats traitant la question ; la formule donnant $V(aX + b)$ en fonction de $V(X)$ est moins connue.
- (d) Les candidats traitant la question écrivent correctement l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Par contre, l'inégalité $I(1 - I) \leq \frac{1}{4}$ est peu ou mal justifiée.
- (e) Les candidats ont bien compris qu'il fallait utiliser l'événement contraire. Malheureusement, celui-ci est souvent mal écrit et les inégalités passent de larges à strictes (ou inversement) en fonction des besoins des candidats sans que ceux-ci se préoccupent du lien entre les deux événements associés.
- (f) L'application numérique est souvent incomplète et ou erronée.
Quant à l'interprétation, elle se limite souvent à une paraphrase de la formule.
Pour la seconde application numérique, certains candidats mettent en cause leurs calculs et d'autres vont au delà de la question formulée puisqu'ils ajoutent qu'il faudrait plus de simulations pour obtenir la précision souhaitée.

Partie D : Un deuxième couple de variables aléatoires.

1. (a) Les réponses à cette question sont souvent confuses : « tous les coefficients sont liés aux autres », « toutes les lignes (ou colonnes) sont combinaisons linéaires des autres lignes (ou colonnes) ».
Les candidats justifiant correctement que toutes les lignes (ou colonnes) sont proportionnelles, oublient d'éliminer la matrice nulle.
 - (b) On trouve plus souvent « Q admet $n - 1$ (ou $n^2 - 1$) valeurs propres simples » que « 0 est valeur propre de Q d'ordre (au moins) $n - 1$ ».
La dernière valeur propre est rarement égale à $\text{tr}(Q)$ et les candidats oublient d'exclure le cas $\text{tr}(Q) = 0$.
 - (c) Généralement cohérente avec la question précédente... sauf pour les candidats qui évoquent le théorème spectral.
 - (d) Les matrices proposées ne peuvent pas correspondre à une loi conjointe (coefficients strictement plus grands que 1 ou dont la somme ne vaut pas 1) et ne sont pas de rang 1.
Il convenait également de prouver qu'elles n'étaient pas diagonalisables.
2. Question très peu traitée et jamais avec succès.