

Rapport – Mathématiques A – Banque PT 2025

Remarques générales

Dans ce rapport le terme *candidat* désigne un candidat ou une candidate.

Le sujet comprenait deux exercices. L'exercice 1 portait sur les polynômes de Legendre et faisait intervenir des méthodes classiques d'algèbre linéaire. L'exercice 2 portait sur des probabilités discrètes et couvrait une vaste partie du programme de probabilité des deux années de classe préparatoire. Chaque exercice comptait pour environ la moitié des points de barème et des points *bonus* ont récompensé les copies présentant une bonne présentation et une bonne rédaction.

L'exercice d'algèbre a été bien mieux traité que celui de probabilités, partie qui semble comme chaque année être une impasse pour certains candidats. Ainsi plus de 12% des copies n'ont aucun point sur cet exercice (5% n'abordent pas l'exercice et 7% l'abordent mais n'ont aucun point). En revanche la quasi-totalité des copies aborde l'exercice d'algèbre et répond correctement à quelques questions (moins de 1% n'a aucun point sur cet exercice). A l'inverse, certaines copies excellentes ont fini le sujet et ont l'intégralité des points de barème.

Comme chaque année, nous insistons sur la présentation des copies : les résultats doivent être encadrés à la règle, les ratures évitées et les calculs non aboutis correctement barrés (éviter de mélanger ratures et résultats qui doivent être lus). Il en est de même pour la rédaction : les calculs doivent être justifiés, en particulier lorsque le résultat demandé est donné dans l'énoncé. En particulier, il est demandé de terminer les calculs : on trouve dans les réponses finales des candidats : $2n - n$, $2n + n(n - 1)$, $4(X^2 - 1) + 8X^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k}$ ou encore $p^k(1 - p)^{n-k}$ avec $p = \frac{1}{2}$.

Enfin, une attention doit être portée sur l'orthographe et la conjugaison (erreurs fréquentes : "on pert", "peut importe", "la probabilité qu'il est gagné", "Bernouilli"). On ne dit pas "c'est une bernoulli", une variable aléatoire n'est pas une loi (elle suit une loi). On voit des calculs amorcés non aboutis, voire inutiles, des phrases alambiquées qui se terminent par "bref..." : le brouillon sert à éviter cela.

Remarques particulières

Exercice 1

Préliminaire

1. (a) Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.

Il fallait justifier que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ ce qui a parfois été oublié. La linéarité est parfois oubliée (constat également vu dans l'épreuve de Mathématiques B). Certains candidats pensent qu'il faut montrer que $\varphi(P)$ est de degré $\deg(P)$, ce qui est faux. D'autres pensent que tous les polynômes sont de degré 1 ou de degré 2 ou confondent $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$.

Pour la linéarité, il est maladroit d'appeler le deuxième polynôme X ou P' . Par ailleurs, en écrivant $\lambda \in \mathbb{K}$, il faut préciser qui est $\mathbb{K}$.

- (b) Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.

Les simplifications ne sont pas toujours faites pour $\varphi(X^n)$. Attention à ne pas utiliser de factorisations avec X^{-2} , qui n'est pas un polynôme.

Partie 1

2. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.
La deuxième dérivée a parfois été oubliée pour P_2 .
3. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.
On note parfois des récurrences inutiles ou qui n'en sont pas : l'absence d'utilisation de la propriété de récurrence doit alerter.
4. (a) Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.
(b) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
On note beaucoup de parenthèses oubliées et des confusions sur l'ordre de dérivation (p et non pas n) et les objets considérés (polynômes et non fonctions).
(c) La calcul de $\binom{n}{2}$ a semblé poser problème. Attention aux rédactions un peu malhonnêtes, surtout quand la formule de Leibniz est incorrecte.

Partie 2

On note une confusion entre N et n dans cette partie. Globalement la réduction des matrices n'est pas maîtrisée, et très souvent il y a des confusions entre les objets (vecteurs, valeurs, espaces propres).

5. La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
Les polynômes de $\mathbb{R}_N[X]$ ne sont pas tous de degré N : sans argument supplémentaire, vérifier que $\deg \varphi(P_N) = N$ ne suffit pas. De même, la vérification pour $\varphi(X^N)$ ne suffit pas sans détail supplémentaire. La linéarité de φ_N n'avait pas besoin d'être prouvée.
6. La taille de la matrice est souvent incorrecte. Peu de candidats se rendent compte que le calcul nécessaire a déjà été effectué à la question 1 (b), en particulier ce n'est pas le calcul $\varphi(P_n)$ qui est demandé. Attention à ne pas prendre l'initiative de poser $N = 2$ ou 3 lorsque le résultat est demandé pour N quelconque.
7. Cette question est très classique en réduction, cependant de nombreuses erreurs sont à signaler :
 - Il arrive régulièrement que les valeurs propres ne soient pas données alors que le polynôme caractéristique est calculé ou qu'il est annoncé qu'elles sont les éléments de la diagonale.
 - Si l'argument principal est de dire que les valeurs propres sont toutes simples, il faut prouver qu'elles sont distinctes.
 - "Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples" est une condition suffisante, pas une condition nécessaire et suffisante de diagonalisation.
 - On trouve régulièrement un spectre de cardinal infini. Certains candidats ne veulent pas que 0 soit valeur propre bien qu'il soit sur la diagonale.
 - Rappelons qu'il n'y pas de lien entre "0 est valeur propre" et "la matrice est diagonalisable".
 - Utilisation fréquente du polynôme caractéristique (avec des candidats qui se perdent en cherchant à calculer un déterminant via des opérations élémentaires) : cette notion n'est pas utile ici.
 - Plusieurs apparitions de théorèmes grossièrement faux, du genre "la matrice est triangulaire supérieure donc diagonalisable".
8. La dimension du sous-espace propre est peu justifiée, souvent une seule inclusion est donnée. On note une confusion entre P_n et $\text{Vect}(P_n)$.
9. Résultat souvent non justifié ou parfois seulement une inclusion.

Partie 3

10. La majorité des candidats a correctement traité cette question mais seul un cinquième a tous les points de barème.

Cette question est très classique et il est attendu une rédaction claire des candidats. En particulier, le point le plus difficile consiste à prouver le caractère défini et les points suivants doivent être clairement établis :

- P^2 est positive et continue sur $[-1, 1]$ donc $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = 0$ implique $P^2(t) = 0$ sur $[-1, 1]$,
- P est alors un polynôme avec une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

Notons également les fréquentes imprécisions suivantes : le fait que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ est peu précisé, la bilinéarité est parfois rédigée de façon trop minimale. D'ailleurs, ce n'est pas $\langle P, Q \rangle$ qui est bilinéaire. Enfin, P^2 n'est pas une fonction paire.

11. (a) Les candidats ont souvent pensé à l'intégration par parties, mais n'ont pas toujours utilisé la bonne expression de $\varphi(P)$. On note par ailleurs des mélanges dans les notations entre X et t : on voit apparaître $(X^2 - 1)P'_n(t)P'_m(t) dt$.
- (b) L'utilisation de $n \neq m$ n'est pas toujours bien expliquée.
12. (a) Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.
Les notations $mult(1)$, $m(1)$, $\mu(1)$ ou $\lambda_{(m)}$ ne sont pas universelles : il faut les définir au préalable. De plus, elles peuvent être évitées ici car ne font pas gagner de temps. Il est incorrect de dire que les racines sont $\{-1, 1\}$.
- (b) Peu de candidats ont pensé à faire des intégrations par parties successives et la nullité du crochet est peu justifiée. Une rédaction sans récurrence et expliquant les principales étapes du raisonnement était acceptée.
- (c) Un calcul pour une petite valeur de n permettait de repérer une éventuelle erreur de calcul. Attention, $2n! \neq (2n)!$.
- (d) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
Quelques erreurs, sans doute d'inattention : normes négatives, $\sqrt{(-1)^2} = -1...$
13. Il est souvent justifié que la famille proposée est orthonormée, parfois qu'elle est libre et rarement que c'est une base.

Exercice 2

Les probabilités semblent toujours poser de grandes difficultés à une majorité des candidats : les trois premières questions, bien que très classiques, ne sont correctement traitées que par une minorité. Nous rappelons qu'il faut bien prendre le temps de lire le sujet et de comprendre la situation qui est modélisée. Bien que le jeu présenté n'ait aucun intérêt pour les joueurs (l'espérance de gain est inférieure à la mise, ce que peu de candidats ont noté), la modélisation permettait de tester les méthodes classiques des probabilités discrètes.

Dans cet exercice k était particularisé pour un joueur particulier, il était donc maladroit d'utiliser cette lettre comme indice des sommes. Nous notons quelques erreurs et imprécisions courantes en probabilités :

- Beaucoup de *retro-engineering* et de probabilités annoncées pour que cela colle au reste de l'exercice.
- L'expression "par indépendance" doit être remplacée par une phrase où les objets indépendants sont clairement identifiés.

- Ne pas utiliser "proba(s)" au lieu de "probabilité(s)".
- L'écriture $\overline{P(A)}$ est incorrecte. L'intersection de deux variables aléatoires ou de deux probabilités n'existe pas.
- $\mathbf{E}(X) = \sum x_i \mathbf{P}(X = x_i)$ n'est pas la formule de transfert et $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(A)$ n'est pas la formule de Bayes. Par ailleurs la notion de probabilité conditionnelle semble se réduire à sa définition pour de nombreux candidats.
- La formule des probabilités totales est en particulier assez mal connue et fait très souvent intervenir uniquement des probabilités conditionnelles.
- Confusions entre "événement" et "variables aléatoires"
- Entre deux événements on utilise le signe $=$ et non $\Leftrightarrow$.

Partie 1

1. La majorité des candidats a correctement traité cette question mais moins d'un sixième a tous les points de barème.

Comme souvent dans les exercices de probabilité, on assiste à des annonces sans argumentation pour citer des lois usuelles (uniforme, géométrique, Poisson...) qui n'ont pas de lien avec la situation décrite. Pour conclure avec la loi binomiale il est nécessaire de mentionner l'indépendance. On note cependant un effort de justification lorsque la bonne réponse est donnée.

Le nom des lois doit être donné, avec leur paramètre, pas uniquement leur notation, il est d'ailleurs parfois difficile de trouver la valeur de p (celle-ci n'est pas toujours explicitement mentionnée sur la copie).

2. La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.

Les arguments du type " S prend au minimum la valeur... et au maximum la valeur..." sont à éviter ici sachant que S ne peut prendre que deux valeurs. Cela devient faux lorsqu'il est mentionné que S prend ses valeurs entre 0 et n . Nous avons constaté $S(\Omega)$ parfois incomplet ou $\mathbf{P}(S = 0)$ pas toujours justifiée. S ne suit pas une loi de Bernoulli (ou une autre loi usuelle) : l'univers image ne convient pas.

3. Moins d'un tiers des candidats qui ont traité cette question y a, au moins partiellement, bien répondu.

L'indépendance des X_i n'est pas utile pour la linéarité (et fausse ici), les X_i suivent la même loi mais elles ne sont pas égales. Rappelons que l'espérance d'un quotient de variables aléatoires n'est pas le quotient des espérances.

4. Quelques erreurs dans le sens de variation. Les candidats utilisant un argument de "bon sens" ont pris en compte l'augmentation de la mise ou l'augmentation du nombre de joueur (et donc de gagnants) mais rarement les 2 ensembles.

Partie 2

5. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.

La justification est souvent absente.

6. (a) Quelques candidats ont vu qu'il s'agissait de mettre le joueur k de côté mais n'ont pas toujours su le formaliser. Plus généralement, la notion de loi conditionnée par un événement semble mal connue. Attention aux réponses sorties de nulle part pour essayer de coller à la question suivante.
- (b) Les candidats ne se laissent pas suffisamment guider par l'énoncé et n'utilisent pas l'indication donnée.

7. La formule du binôme de Newton n'est pas toujours bien utilisée ($n = 0$ ou confusion p^n et p^i). Sur un certain nombre de copies, les candidats somment $\mathbf{P}(X_k = n/i) * (n/i)$ pour i qui débute à 0.
8. En probabilité, l'indépendance de 2 variables aléatoires repose sur une définition précise (où la probabilité intervient) et peut donner des résultats incohérents avec ce que le "bon sens" appelle indépendant.

Partie 3

9. (a) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
La première est mieux justifiée que la seconde.
- (b) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
La formule des probabilité totales est mal connue et son système complet d'événements souvent oublié. Quelques candidats concluent pour $P(T = n)$ sans vraiment avoir vu l'identité remarquable.
- (c) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
- (d) La définition de la covariance reste mal connue et le calcul de $\mathbf{E}(ST)$ a posé des problèmes. Rappelons que $\text{Cov}(S, T) = 0$ n'entraîne pas que S et T sont indépendants, et $\mathbf{E}(S, T)$ n'a pas de sens.
10. La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
11. La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
Les candidats ont souvent compris qu'il fallait comparer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Z)$ avec parfois des discussions sur le fait que le joueur a perdu à l'aller.

Partie 4

12. (a) Une majorité de $\{0, N\}$ parfois $\llbracket 0, N \rrbracket$ ou $[0, N]$ alors que N est une variable aléatoire.
La bonne réponse est rarement justifiée. Des réponses fausses sont en contradiction avec ce qui est fait dans les questions suivantes.
- (b) De nombreux candidats traitent le cas $i \neq j$, trouvent 0, et pensent alors que l'autre probabilité vaut 1.
- (c) Cette question, difficile, a été correctement traitée par quelques candidats. Néanmoins, $\mathbf{P}(U = 0)$ est souvent oubliée.
13. Les candidats ayant correctement traité la question précédente ont également résolu cette question.
14. Certains candidats évoquent la non rentabilité du jeu si on prend en compte la mise.

MATHEMATIQUES B 2025

Présentation générale :

Le sujet de cette année se composait de trois exercices indépendants.

- L'objectif du premier exercice était d'étudier et de tracer une conique dont une équation cartésienne était donnée ;
 - L'objectif du deuxième exercice était de résoudre une équation différentielle du second ordre normalisée à l'aide d'outils d'algèbre linéaire ;
 - Le dernier exercice, composé de 2 parties de longueur similaire et qui pouvaient être traitées indépendamment l'une de l'autre avait pour objectif l'étude de lignes de plus grande pente sur un cône puis sur une surface de révolution d'axe (Oz).
- La répartition du barème est d'environ 20%, 30% et 50%.

La longueur raisonnable du sujet a permis à une grande majorité des candidats d'aborder le totalité des questions.

Quelques questions plus difficiles, en particulier dans la deuxième partie du troisième exercice, ont permis aux candidats les plus à l'aise de se démarquer.

On constate que le nombre de copies très faibles est resté stable par rapport à l'an dernier. Le sujet a donc permis de classer l'ensemble des candidats.

Présentation des copies :

Le nombre de candidats refusant une quelconque mise en évidence dans résultats et/ou qui parsèment leur copies de ratures (on ne parle pas ici des réponses soigneusement rayées à l'aide d'une règle) continue à diminuer.

Il est toutefois rappelé que les réponses doivent être encadrées et que les traits doivent être tracés à l'aide d'une règle.

Par ailleurs, dans un sujet de géométrie, les candidats ne doivent pas hésiter à illustrer leurs réponses par un schéma. Les candidats qui le font à bon escient sont récompensés.

Rédaction :

La qualité de la rédaction est inégale : certains points soulignés dans les rapports précédents ont été pris en compte.

En revanche, d'autres points demandent encore à être améliorés, en particulier l'usage des quantificateurs.

Ils seront évoqués dans le détail question par question.

Il y a un point qu'il convient de souligner à propos ce sujet : de nombreux candidats ont perdu des points bêtement à cause d'un manque d'attention et/ou d'une mauvaise lecture de l'énoncé.

Enfin on rappelle aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre et que, comme indiqué sur le sujet, la feuille de papier millimétré doit être rendue avec la copie (insérée au bon endroit et non reléguée à la fin de la copie, c'est encore mieux).

Premier exercice.

On compte 9% des candidats qui ont fait l'impasse totale sur cet exercice.

L'étude des coniques a clairement moins de succès auprès des candidats que l'étude d'une courbe paramétrée.

1. Question bien réussie.
2. Question bien réussie même si les sous-espaces propres ne sont pas toujours (bien) justifiés.
Quelques candidats ne donnent pas les sous-espaces propres demandés mais seulement un vecteur propre.
3. Généralement l'équation demandée est trouvée. Mais une justification minimale est attendue.
De plus on a beaucoup de mal à trouver le repère $\mathcal{R}'$ demandé (on rappelle qu'un repère de $\mathbb{R}^2$ est la donnée d'un point et de deux vecteurs non colinéaires) et lorsqu'on le trouve (ou ce qui y ressemble), il n'est pas toujours orthonormé (parfois les deux vecteurs n'ont même pas la même norme) et/ou direct.
4. Bien réussie... même si le déterminant de Q n'est pas utile pour répondre lorsque l'on dispose de l'équation réduite.
5. Les éléments caractéristiques souhaités étaient bien précisés : centre, sommets et asymptotes. Il était donc inutile de donner excentricité, directives, foyers, ... surtout à la place des éléments demandés.
Lorsqu'elles sont données - il est rare que l'on ait les 3 éléments -, les coordonnées ou équations dans $\mathcal{R}'$ sont souvent correctes... à part des confusions entre 3 et $\sqrt{3}$. Par contre, les coordonnées ou équations dans $\mathcal{R}$ ont eu peu de succès.
6. Il est dommage que les candidats soient si peu nombreux à essayer de tracer cette hyperbole... alors qu'ils en ont l'équation réduite... surtout qu'ici, on pouvait même mettre l'équation sous la forme $x = g(y)$.
Comment souvent, les correcteurs ont du mal à trouver sur le dessin les deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Par contre, sommets et asymptotes étaient bien présents (pas toujours bien placés).
Ce tracé représentait près de 30% du barème de l'exercice...

Deuxième exercice.

Partie I

1. Les candidats ont su exploiter correctement les différentes méthodes possibles pour traiter cette question.
Pour ceux ayant utilisé le discriminant (et non le déterminant), en plus d'erreurs de calcul relativement fréquentes ($4 - 4 \times (-2) = 26$ ou 30 , $\sqrt{28} = 2\sqrt{6}$, ...), il y a ceux qui ont démontré soigneusement que $\frac{\sqrt{7}-1}{3} < 1$ et ceux qui se sont contentés de l'affirmer.
2. Cette question est ratée.
Il s'agissait de démontrer un résultat du cours. La caractérisation des sous-espaces vectoriels n'est pas connue de la plupart des candidats.
Le théorème de superposition (des solutions) n'avait pas sa place ici, tout comme l'équation caractéristique.

3. Toutes les valeurs entre 0 et $+\infty$ ont été proposées.
 Parfois, même en faisant preuve de bonne volonté, il est impossible pour les correcteurs de savoir si la réponse est 1 ou 2 (les deux chiffres sont superposés, ou la réponse est trop droite pour un 2 et pas assez pour un 1).
 Les candidats sont invités à respecter la consigne « sans démonstration », cela leur évitera d'écrire des justifications totalement fausses...
 Finalement, il n'y a que 45% de réponses correctes pour cette question de cours.
4. Il serait souhaitable que :
 le calcul commence par

$$\ll (3x + 1) f_1(x) + (2 - x) f_1'(x) - \frac{x}{2}(3x^2 + 2x - 2) f_1''(x) = \gg.$$

 les candidats utilisent « $\forall x > 1$ » au(x) moment(x) opportun(s).
 les candidats écrivent « f_1 est solution de (E_H) sur $]1; +\infty[$ » et non « $f_1(x)$ est solution de (E_H) ».
 Par ailleurs, l'usage d'équivalent ($\Leftrightarrow$) n'est pas la méthode la plus adaptée pour ce type de questions dans la mesure où on n'essaye pas de résoudre une équation.

Partie II

5. Les candidats ont (presque) tous trouvé une méthode qui leur convient parmi les nombreuses possibles.
 A noter que tous les candidats ayant trouvé que la matrice est inversible ont également trouvé que son noyau n'était pas réduit à $\{0\}$ sans que cela les fasse réagir.
 Quelques points à améliorer sur la forme :
 Entre deux déterminants, il y a le signe « = » et lorsque on échelonne une matrice, le signe entre les différentes matrice est « $\sim$ » ou « $\underset{L}{\sim}$ »
 Pour les candidats qui échelonnent la matrice
 il est inutile d'échelonner la matrice augmentée $(A|I)$;
 les calculs ne sont pas toujours finis et la raison de la non inversibilité de A pas toujours mise en évidence.
 C'est une bonne idée d'annoncer la méthode que l'on veut utiliser mais le faire avec la propriété (juste) « une matrice est inversible si son déterminant est non nul » n'était pas adaptée ici.
6. Les systèmes doivent être résolus par équivalence (entre 2 systèmes, pas entre un espace vectoriel et un système).
 Quant aux candidats qui utilisent les opérations sur les colonnes, ils doivent justifier correctement la dimension du noyau ($C_1 = C_2 + C_3$ ne justifie pas que le rang de la matrice vaut 2).
7. De nombreuses confusions avec les invariants.
 Ceux qui ont choisi la vision géométrique s'en sont mieux sortis que ceux qui ont choisi la vision algébrique. Dans ce second cas, ce n'était en général pas convaincant et mal rédigé (et il n'est pas certain que sans la réponse qui figurait dans l'énoncé, l'équation aurait été trouvée).
8. Peu traitée et ceux qui la traitent fournissent rarement une justification...
 S_1 est un peu mieux justifié que S_2 .
9. De nombreuses erreurs dans la résolution de ce système.
 L'expression « résoudre » demande de trouver toutes les solutions et pas seulement

une seule.

Par ailleurs, pour « résoudre » un système, il ne suffit pas de le transformer en un système équivalent, il faut également décrire les solutions ou l'ensemble des solutions. Autrement dit : lorsque les calculs sont finis, il convient d'écrire une conclusion... d'autant qu'il est constaté que celles qui sont écrites sont régulièrement inexactes.

Partie III

10. Les correcteurs ne terminent pas les calculs à la place des candidats...
La question 12 a permis aux candidats de rectifier quelques erreurs de développement.
11. La définition est mal connue.
De plus, si démontrer que $\varphi(0) = 0$ est inutile (mais correct), les phrases « $0 \in \varphi$ » ou « $\varphi \in \mathbb{R}_2[X]$ » n'ont pas de sens.
Par ailleurs, trop de candidats se contentent d'affirmer que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ sans justification, ce qui n'était pas si évident ici, sans compter que les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ ne sont pas tous de degré 2.
Les candidats utilisent trop peu la question 10. pour cela (et cela doit être fait après la linéarité).
12. Question qui n'a pas posé de problème particulier.
13. Les éléments du noyau de A ont trop rarement été transformés en polynômes pour donner les éléments du noyau de φ et lorsque cela a été fait, le « Vect » a souvent disparu.
La solution demandée de $\varphi(P) = 3(1 + X + X^2)$ est davantage donnée sous forme de polynôme.
A noter que l'on demandait UNE solution, pas toutes les solutions.

Partie IV

14. Cette question synthèse a été très peu traitée.
 S et S_H sont des ensembles, pas des fonctions.
L'indépendance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto -2 + x + x^2$ est oubliée et on note des incohérences avec la question 3.

Troisième exercice.

On constate, dans cet exercice, de très nombreuses confusions entre les différents objets. Ainsi, il n'est pas rare que les candidats s'intéressent à $M(-t)$ de Γ dans la première question de la partie 1 alors que cette question porte sur S .

Un effort, encore perfectible, est constaté sur la rédaction de « $A \in S$ » ou de « $\Gamma \in S$ », en particulier chez ceux qui calculent séparément les deux cotés de la relation et qui constatent leur égalité.

Par ailleurs, les candidats ont majoritairement défini (plus ou moins bien) les fonctions issues des équations de surfaces, afin de ne pas dériver ces dernières. On les en félicite.

Par contre, c'est bien moins fait pour les courbes et on signale que dans ce cas, on ne calcule pas de gradient.

Partie I

1. (a) Comme toujours dans cette question, des confusions avec l'intersection (ou plus rarement la symétrie par rapport à l'axe des abscisses).
Les démonstrations ne sont pas toujours convaincantes.
- (b) Il n'est en général pas possible de savoir si les candidats ont vérifié que le point trouvé appartient à la surface.
Attention : la phrase « O est un point non régulier de S » est correcte mais ne constitue qu'une réponse incomplète à la question.
- (c) Attention à ne pas oublier la moitié de la question...
Comme cette question est posée tous les ans, la méthode commence à être largement acquise.
Même s'il reste encore des équations qui ne sont pas des équations de plan, il ne reste presque plus de plan qui ne passent pas par le point A .
Il est rappelé que les équations doivent être développées et simplifiées.
Par contre, environ la moitié des candidats s'est trompée dans l'évaluation du gradient en A alors que celui-ci avait été bien calculé : $(x, -y, -z)$ a été évalué au lieu de $(x, -z, -y)$...
- (d) Ceux qui ont traité la question ont en général bien traduit la condition de parallélisme mais ont oublié de vérifier que le point était dans S ...
- (e) La condition d'orthogonalité a été un peu moins bien traduite mais davantage de candidats ont pensé à placer le point sur la surface (mais sans les alerter pour la question précédente).
2. En faisant plus attention au domaine parcouru par t , les candidats auraient gagné du temps.
De nombreuses ambiguïtés quant au nombre de coordonnées qui ne doivent pas être nulles...
3. Les quantificateurs sont trop souvent absents...
4. (a) La valeur est souvent trouvée, pas toujours de façon efficace et à l'aide de « $\Leftrightarrow$ » pas très justes.
- (b) Bien traitée lorsqu'elle l'a été.
- (c) Les candidats m'ont pas réussi à se détacher du fait que dans cette question $M(t)$ n'était plus vu comme un point de Γ mais comme un point de Γ_a .
- (d) Peu traitée.
Mieux vaut dire que l'on ne trouve pas $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et admettre qu'il doit y avoir une erreur dans les calculs et/ou les questions précédentes plutôt que de tenter un coup de bluff.

Partie II

1. (a) De nombreux candidats ont absolument voulu introduire $f(t)$ et $g(t)$ dans cette question et/ou se sont débarrassés d'une équation transformant une courbe en surface et/ou ont voulu trouver une représentation paramétrique et ont fini par donner Γ .
La tangente à une courbe définie comme intersection de 2 surfaces semblent bien peu connue.
On trouve régulièrement des vecteurs n'ayant que 2 coordonnées !
- (b) Rares sont les candidats qui ont justifié que l'ont pouvait utiliser la question précédente... c'est à dire que le point $M(t)$ était régulier.

- (c) L'expression en fonction de Φ est correcte, celle en fonction de φ beaucoup moins.
 - (d) Peu traitée.
Invoquer un produit vectoriel pour trouver coûte que coûte l'expression demandée n'est pas une bonne idée.
2. (a) La plupart des candidats écrivent les hypothèses et en déduisent sans aucune démonstration la conclusion.
D'autres écrivent qu'une fonction qui ne s'annule pas est de signe constant sans aucune indication des propriétés de régularité de ladite fonction.
Plus rarement, il est cité « d'après le théorème des valeurs intermédiaires » mais toujours sans ses hypothèses ou « d'après le théorème de Rolle » !.
Enfin, certains candidats évoquent le sens de variation de $(x, y) \mapsto h(x, y) \dots$
- (b) Les hypothèses et la conclusion du théorème de la bijection (quelque soit le nom sous lequel les candidats le connaissent) sont très mal connues.
Certes, le comportement de h sur $\mathbb{R}^{-*}$ n'était pas connu, cela n'empêchait pas de dire que $h(t_0) = \alpha$ n'avait pas de solution sur $\mathbb{R}^+$ lorsque $\alpha \notin h(\mathbb{R}^+)$.
 - (c) Comme d'habitude quand cette question est posée, les candidats se débarrassent de l'équation du plan et fournissent un centre à 2 coordonnées.
On a vu régulièrement : $\alpha = h(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{\alpha}{h} \dots$
 - (d) Les explications sont souvent peu claires, incomplètes avec des confusions entre $\cap$ et $\cup \dots$
3. Peu traitée... et rarement réussie, avec quelques $\frac{f'}{g'} = 0 \dots$
4. Peu traitée mais plutôt réussie.
5. (a) Cette question de cours est placée trop loin dans le sujet pour que l'on puisse évaluer sa connaissance par les candidats.
On note quand même des confusions avec les parallèles, les génératrices (et non directrices), et il ne s'agit pas toujours d'une courbe.
- (b) Peu traitée.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *correcteur* désignera une correctrice ou un correcteur.

Remarques générales

Le sujet de cette année avait pour objet le calcul des intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$,

Cette épreuve a été globalement bien réussie, mieux que celle de l'année dernière. L'intégralité du sujet a été traitée dans de très bonnes copies, qui ont donc obtenu la note maximale de vingt sur vingt. Toutefois – et c'est l'un des points notables de cette année – de nombreuses copies **ne comportent aucune réponse correcte**, alors que le sujet contenait des questions de cours ou proches du cours, ainsi que des questions faciles de niveau lycée (déterminer le domaine de définition d'une fonction rationnelle, où le dénominateur est un polynôme du second degré). Ces copies ont eu droit à un point de présentation, pour leur éviter la note de zéro.

Comme l'an passé, nous alertons sur l'écriture difficilement déchiffrable d'un grand nombre de copies, et sur la pâleur de l'encre parfois utilisée. L'orthographe laisse toujours à désirer, en particulier, quand il s'agit de termes mathématiques, ou de noms propres de mathématiciens (Riemann, déformé en « reiman », ou autres variantes, sans majuscule qui plus est). Nous avons aussi – malgré ce qui figurait dans le rapport de l'an passé – retrouvé les sempiternelles abréviations : « cv », par exemple, ou la terminologie transformée : si on dit qu'une intégrale est impropre, on ne parle pas « d'impropreté ».

Nous rappelons que les traits se tirent à la règle, et que les résultats doivent être encadrés.

Remarques particulières

Préambule

1. La première question demandait d'étudier la convergence des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt$$

Il fallait bien sûr utiliser le fait que l'on intègre des fonctions à valeurs positives, et, au voisinage de l'infini, faire intervenir une comparaison avec les intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$, qui sont convergentes (à l'aide d'un équivalent ou par majoration).

Si la majorité des candidats a correctement traité cette question, nous avons par contre trouvé beaucoup de réponses vagues ou imprécises : « par comparaison » (avec quoi ?), « comme $\frac{1}{t^4}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable » (mais où ?), « par comparaison avec Riemann », « en appliquant le test de Riemann » (qui n'est évidemment pas précisé), « comme $4 > 1$ », etc ...

Nous avons également rencontré des formulations ne voulant rien dire, comme : « $\frac{1}{t^2}$ converge par Riemann », « les intégrales convergent pour $t > 1$ et divergent sinon ».

Beaucoup de candidats ont aussi écrit que « l'intégrale de Riemann $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4}$ est convergente ».

Enfin, certains candidats écrivent simplement que les intégrandes tendent vers 0 en l'infini, et que cela assure la convergence des intégrales.

2. Cette seconde question était une question de cours, où il était demandé d'énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées. Plus de 70% des copies n'ont pas répondu ou n'ont pas répondu correctement à cette question. De nombreuses copies ont laissé la question sans réponse, d'autres ont vaguement essayé de formuler qu'il fallait un changement de variable bijectif, sans plus

de précision, d'autres ont écrit des formules incohérentes. Lorsqu'une partie de la réponse était correcte, il manquait souvent une hypothèse : caractère C^1 ou bijectif du changement de variable, erreurs sur les bornes, par exemple.

3. La dernière question de ce préambule demandait de comparer (sans les calculer)

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1}$$

L'idée bien sûr était d'appliquer le théorème du changement de variable énoncé à la question précédente. Le changement de variable $\frac{1}{t} = x$ était indiqué. Cette question n'a pas toujours obtenu de réponse correcte, un nombre non négligeable de candidats ayant trouvé que les deux intégrales étaient opposées l'une de l'autre, alors que l'on intègre des fonctions positives.

Un certain nombre de candidats ont compris *comparer* par « trouver une inégalité entre les deux intégrales ».

Il est à noter également que quand on multiplie l'intégrande par $-\frac{1}{x^2}$, il faut mettre des parenthèses.

Partie I

1. Dans cette première question, il fallait déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_h$ de la fonction h qui, à tout réel t de $\mathcal{D}_h$, associe :

$$h(t) = \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 + 1 - \sqrt{2}t}$$

Si la grande majorité des candidats a correctement calculé le discriminant du trinôme du second degré $t^2 + 1 - \sqrt{2}t$, qui valait -2 , et en a déduit que la fonction $t \mapsto t^2 + 1 - \sqrt{2}t$ ne s'annulait pas sur $\mathbb{R}$ (ou était à valeurs strictement positives), de nombreuses copies ont donné des réponses sans aucune justification : « le dénominateur ne s'annulant pas », par exemple. Le discriminant est souvent confondu avec le « déterminant ».

Certains candidats (en nombre non négligeable) ont donné un domaine de définition constitué d'intervalles avec des bornes non réelles (dans $\mathbb{C}$).

2. Dans cette question, la plupart des candidats ont correctement calculé $\int_0^X h(t) dt$.

Par contre, il y a eu beaucoup d'erreurs au niveau du calcul de $\int_X^0 h(-t) dt$. De nombreux candidats ont obtenu l'opposé de la réponse correcte.

Beaucoup de candidats ont donné des résultats en ln de la valeur absolue du résultat (qui était bien strictement positif). Il est dommage que les candidats choisissent l'assurance plutôt que de se poser la question (surtout si la précédente a bien été traitée).

3. Une grande partie des candidats a correctement calculé la limite demandée. Certains l'ont fait de manière un peu compliquée, en factorisant par X^2 à l'intérieur de chacun des logarithmes, puis en effectuant un développement limité en $\frac{1}{X}$. Tous les calculs corrects ont obtenu les points.

Par contre, de nombreux candidats ont obtenu le résultat attendu, mais à l'aide d'un résultat faux issu de leur réponse à la question précédente.

4. La majorité des candidats ont obtenu une primitive de la fonction considérée. Nous rappelons que $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ et qu'il est bon de simplifier les expressions lorsque cela est possible.

Nous alertons aussi sur l'emploi parfois nécessaire des *délimiteurs* que sont les **parenthèses**, qui sont justement requis pour éviter les ambiguïtés lorsque cela est nécessaire : certains candidats donnent ainsi comme primitive la fonction

« $t \mapsto \arctan \left(X - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2}$ », qu'il faut en fait comprendre suivant les cas comme « $t \mapsto \arctan \left(\sqrt{2} \left(X - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$ », ou « $t \mapsto \sqrt{2} \arctan \left(X - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ », ce qui n'est pas du tout la même chose.

Nous avons aussi trouvé de nombreuses réponses complètement fausses, faisant intervenir des logarithmes ou des tangentes.

5. Les candidats ayant répondu correctement à la première question ont obtenu le domaine de définition de la fonction g .

Si une grande partie des candidats ont obtenu une primitive correcte de la fonction g , de nombreux autres se sont trompés (facteur 2 manquant, ou facteur $\sqrt{2}$ ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$ incorrect).

6. Beaucoup de candidats n'ont pas donné la réponse correcte à cette question.
7. Très peu de candidats (environ un quart) ont donné la valeur de la limite demandée.
8. La très grande majorité des candidats a correctement calculé, pour tout réel $t \geq 0$, $h(t) + h(-t) + g(t) + g(-t)$.

D'autres, par contre, n'ont pas finalisé leur calcul, ou en ont laissé le soin aux correcteurs ...

9. (a) Peu de candidats ont obtenu la réponse correcte à cette question, en raison d'erreurs antérieures dans le calcul des primitives.

(b) Nos commentaires sont les mêmes que pour la question précédente.

Nous soulignons qu'on peut comprendre que des erreurs de calcul antérieures amènent à des résultats erronés. Toutefois, il est dommage que certains candidats trouvent que les intégrales sont nulles, voire négatives, et ne réagissent pas.

10. Peu de candidats ont obtenu la valeur correcte de $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt$.

Partie II

1. (a) Dans cette question, il fallait commencer par appliquer le théorème de dérivation terme à terme des séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence (ce qui n'a pas été précisé par tous les candidats), puis, après des changements d'indices (et non de variable), utiliser le théorème d'unicité de décomposition des séries entières. Beaucoup de candidats se contentent d'écrire une suite de relations sans aucune justification, font intervenir des sommes incorrectes, à partir de 2, ou bien de -1 , qui font donc intervenir elles-mêmes des coefficients b_{-1} non définis. Pour certains, le fait que des coefficients ne soient pas définis sous-entend leur nullité. D'autres candidats donnent sur leur copie des morceaux de calcul, laissant à l'examineur le soin de les finaliser. Les relations attendues sont souvent données sans préciser pour quelles valeurs de l'entier n elles sont valables.

Enfin, un nombre non négligeable de copies confondent séries entières, polynômes, et développements limités.

- (b) Les candidats ayant répondu correctement à la première question ont obtenu la relation demandée.
- (c) Dans cette question, où on rappelait que les fonctions C et S étaient supposées paires, il fallait en déduire la nullité des coefficients d'indices impairs de leurs développements en série entière respectifs. Nous avons trouvé de nombreuses réponses incorrectes ou complètement fantaisistes : de nombreux candidats parlent « des coefficients impairs », d'autres expliquent que les coefficients sont positifs, etc ...
- (d) *i.* Dans cette question, il fallait utiliser l'argument de la division euclidienne. Tous les candidats n'y ont pas pensé. Certains ont procédé par récurrence. les autres copies ont tenté des raisonnements alambiqués à partir d'exemples.
- ii.* Dans cette question, pour montrer que, pour tout entier naturel n qui n'est pas multiple de 4, $a_n = 0$, il fallait utiliser les résultats précédents lorsque l'entier n est impair. Lorsque n est congru à 2 modulo 4, il fallait raisonner par récurrence. Tous les candidats ne l'ont pas fait, beaucoup se sont contentés d'indiquer que « c'était évident ».
- (e) Dans cette question à nouveau, il fallait procéder par récurrence sur l'entier p pour obtenir le résultat cherché. Si un grand nombre de candidats l'ont fait, nous avons trouvé beaucoup de raisonnements compliqués lorsqu'il s'agit de démontrer le résultat au rang $p + 1$. En factorisant $(4p + 4)(4p + 2)$ sous la forme $4(2p + 2)(2p + 1)$, on obtenait directement le résultat. Certains candidats ont développé les expressions, ce qui était inutilement compliqué.

Il y a eu fréquemment de la malhonnêteté sur l'initialisation de la récurrence, beaucoup de candidats affirmant que $a_0 = 1$, sans aucune justification (ni dans cette question, ni à la première). D'autres part, certains candidats ont initialisé la récurrence à partir de a_4 ...

Par ailleurs, nous avons trouvé un certain nombre de tentatives d'*escroquerie* à cette question, où les candidats soit ne font aucun calcul en expliquant que « c'est évident », ou encore, en écrivant la formule finale attendue, sans rapport avec leurs calculs.

- (f) Dans cette question, il fallait déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$. Les candidats ne citent pas toujours le critère de d'Alembert qu'ils utilisent implicitement, et celui-ci n'est d'ailleurs pas toujours bien connu : omission des valeurs absolues, confusion entre le rapport dépendant de l'entier n et sa limite, etc ... De nombreux candidats se contentent d'une suite de calculs sans aucun argument, « $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots$ », parfois, il y a des valeurs absolues parfois, il n'y en a pas, parfois, les valeurs absolues sont égales à un nombre négatif, le rayon de convergence est « $R = \frac{1}{0} = \infty$ », etc ...

Peu de candidats ont reconnu les expressions simplifiées $C(x) = \cos(x^2)$ et $S(x) = \sin(x^2)$.

2. (a) Dans cette question, comme dans la précédente, la détermination du rayon de convergence a donné lieu à de très nombreuses réponses fausses ou incorrectes. Outre les résultats donnés sans aucune justification (rayon de convergence égal à 1, sans aucun calcul ni même référence à une série géométrique), nous avons fréquemment trouvé une suite de

$$\ll RCV \left(\sum (-1)^n x^{4n} \right) = RCV \left(\sum x^{4n} \right) = RCV \left(\sum x^n \right) \gg$$

où l'expression « rayon de convergence » n'est jamais explicitement employée.

Par contre, de nombreux candidats ont bien reconnu la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}$.

- (b) La grande majorité des candidats a écrit $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{1+x^4}$ en fonction de la somme d'une série numérique, comme attendu. Par contre, tous ne justifient pas l'échange des signes Σ et $\int$, soit à l'aide du théorème d'intégration terme à terme sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, soit, comme l'ont fait certains, en vérifiant toutes les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme plus général qui figure dans le programme.
- (c) Les candidats ont, en grande partie, fait le lien entre la somme de la série et le résultat de la fin de la Première Partie, même si très peu donnent, au final, la valeur attendue.

Partie III

1. Dans cette question, il fallait montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Si la plupart des candidats ont répondu correctement (soit en utilisant le fait que, lorsque t tend vers l'infini, $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, puis que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente, ou alors, à l'aide de la majoration $e^{-t^2} \leq e^{-t}$, pour tout réel $t \geq 1$), de nombreux autres candidats ont utilisé des majorations fausses ou inutilisables (la majoration $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ n'est pas valable pour tout $t \geq 0$, et une majoration par 1 ne permet pas de conclure).

2. La majeure partie des candidats ont correctement étudié la convergence des intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{t^2} dt$$

Par contre, de très nombreuses copies se contentent de majorer les intégrandes (par $\frac{1}{t^2}$), et non leur valeur absolue. D'autres écrivent que, au voisinage de l'infini, $\ll \frac{\sin(t^2)}{t^2} \sim \frac{1}{t^2} \gg$, d'autres encore confondent les « petit o » et « grand $\mathcal{O}$ ».

3. Dans cette question, il fallait utiliser une intégration par parties pour montrer que les limites

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} I(X) \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} J(X)$$

existaient et étaient finies.

De nombreux candidats se contentent d'écrire une suite de formules : « $u = \dots$ », « $u' = \dots$ », etc ..., mais lorsque l'on cherche l'intégration par parties attendue, on s'aperçoit qu'elle est laissée à la charge des correcteurs, aucune relation ou égalité explicite n'étant donnée.

Au final, un peu moins de la moitié des candidats a correctement répondu à cette question. De nombreuses réponses sont complètement fausses (faisant intervenir des intégrales nulles).

4. Les candidats ayant correctement répondu à la question précédente l'ont aussi fait pour cette question.
5. Dans cette question, il fallait donner le développement en série entière de la fonction

$$t \mapsto e^{it^2}$$

Pour cela, il suffisait d'utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle, de rayon de convergence infini dans $\mathbb{C}$.

De nombreuses copies donnent le développement en série entière de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ dans $\mathbb{R}$, puis écrivent : « donc, en posant $x = it$ », sans faire attention au fait que it n'est donc plus réel.

6. (a) Très peu de candidats ont réussi à déterminer le domaine de définition de la fonction f donnée. Il suffisait de considérer le module de l'intégrande, ce qui n'a été fait que peu souvent. Les candidats n'ont pas tous fait attention que la fonction était à valeurs dans $\mathbb{C}$, et ont écrit des inégalités avec des nombres complexes.
- (b) La majorité des candidats ont réussi cette question, à l'aide du changement de variable $tx = u$.
- (c) Peu de candidats ont obtenu correctement la limite attendue. Lorsque cela a été fait, nous avons noté le grand soin apporté par les candidats à la résolution de cette question.
- (d) L'étude de la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction f introduite à la question 6. (a) n'a pas toujours été bien faite. De nombreux candidats n'ont pas pris en compte le fait que la fonction était à valeurs complexes, nous avons trouvé de nombreuses copies où figuraient des inégalités avec des nombres complexes. En outre, certains candidats ont voulu majorer la valeur absolue du réel $x \in [\varepsilon, A]$ par ε .

D'autre part, de nombreux candidats se contentent de rappeler le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres (qui semble bien connu de la majorité), mais ne donnent pas l'expression de la fonction requise dans l'hypothèse de domination du module de la dérivée partielle par rapport à la variable x .

- (e) La grande majorité des candidats a obtenu l'expression attendue de $f'(x)$.
- (f) Très peu de candidats ont obtenu les valeurs correctes des intégrales de Fresnel.