Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *correcteur* désignera une correctrice ou un correcteur.

Remarques générales

Le sujet de cette année avait pour objet le calcul des intégrales de Fresnel $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$,

Cette épreuve a été globalement bien réussie, mieux que celle de l'année dernière. L'intégralité du sujet a été traitée dans de très bonnes copies, qui ont donc obtenu la note maximale de vingt sur vingt. Toutefois – et c'est l'un des points notables de cette année – de nombreuses copies **ne comportent aucune réponse correcte**, alors que le sujet contenait des questions de cours ou proches du cours, ainsi que des questions faciles de niveau lycée (déterminer le domaine de définition d'une fonction rationnelle, où le dénominateur est un polynôme du second degré). Ces copies ont eu droit à un point de présentation, pour leur éviter la note de zéro.

Comme l'an passé, nous alertons sur l'écriture difficilement déchiffrable d'un grand nombre de copies, et sur la pâleur de l'encre parfois utilisée. L'orthographe laisse toujours à désirer, en particulier, quand il s'agit de termes mathématiques, ou de noms propres de mathématiciens (Riemann, déformé en « reiman », ou autres variantes, sans majuscule qui plus est). Nous avons aussi – malgré ce qui figurait dans le rapport de l'an passé – retrouvé les sempiternelles abréviations : « cv », par exemple, ou la terminologie transformée : si on dit qu'une intégrale est impropre, on ne parle pas « d'impropreté ».

Nous rappelons que les traits se tirent **à la règle**, et que les résultats doivent être **encadrés**.

Remarques particulières

Préambule

1. La première question demandait d'étudier la convergence des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\, dt$$

   Il fallait bien sûr utiliser le fait que l'on intègre des fonctions à valeurs positives, et, au voisinage de l'infini, faire intervenir une comparaison avec les intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$, qui sont convergentes (à l'aide d'un équivalent ou par majoration).

   Si la majorité des candidats a correctement traité cette question, nous avons par contre trouvé beaucoup de réponses vagues ou imprécises : ≪ par comparaison ≫ (avec quoi ?), ≪ comme $\dfrac{1}{t^4}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable ≫ (mais où ?), ≪ par comparaison avec Riemann ≫, ≪ en appliquant le test de Riemann ≫ (qui n'est évidemment pas précisé), ≪ comme $4 > 1$ ≫, etc ...

   Nous avons également rencontré des formulations ne voulant rien dire, comme : ≪ $\dfrac{1}{t^2}$ converge par Riemann ≫, ≪ les intégrales convergent pour $t > 1$ et divergent sinon ≫.

   Beaucoup de candidats ont aussi écrit que ≪ l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4}$ est convergente ≫.

   Enfin, certains candidats écrivent simplement que les intégrandes tendent vers 0 en l'infini, et que cela assure la convergence des intégrales.

2. Cette seconde question était une question de cours, où il était demandé d'énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées. Plus de 70% des copies n'ont pas répondu ou n'ont pas répondu correctement à cette question. De nombreuses copies ont laissé la question sans réponse, d'autres ont vaguement essayé de formuler qu'il fallait un changement de variable bijectif, sans plus

de précision, d'autres ont écrit des formules incohérentes. Lorsqu'une partie de la réponse était correcte, il manquait souvent une hypothèse : caractère C^1 ou bijectif du changement de variable, erreurs sur les bornes, par exemple.

3. La dernière question de ce préambule demandait de comparer (sans les calculer)

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}\, dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}$$

L'idée bien sûr était d'appliquer le théorème du changement de variable énoncé à la question précédente. Le changement de variable $\frac{1}{t} = x$ était indiqué. Cette question n'a pas toujours obtenu de réponse correcte, un nombre non négligeable de candidats ayant trouvé que les deux intégrales étaient opposées l'une de l'autre, alors que l'on intègre des fonctions positives.

Un certain nombre de candidats ont compris *comparer* par « trouver une inégalité entre les deux intégrales ».

Il est à noter également que quand on multiplie l'intégrande par $-\frac{1}{x^2}$, il faut mettre des parenthèses.

Partie I

1. Dans cette première question, il fallait déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_h$ de la fonction h qui, à tout réel t de $\mathcal{D}_h$, associe :

$$h(t) = \frac{2\,t - \sqrt{2}}{t^2 + 1 - \sqrt{2}\,t}$$

Si la grande majorité des candidats a correctement calculé le discriminant du trinôme du second degré $t^2 + 1 - \sqrt{2}\,t$, qui valait -2, et en a déduit que la fonction $t \mapsto t^2 + 1 - \sqrt{2}\,t$ ne s'annulait pas sur $\mathbb{R}$ (ou était à valeurs strictement positives), de nombreuses copies ont donné des réponses sans aucune justication : « le dénominateur ne s'annulant pas », par exemple. Le discriminant est souvent confondu avec le « déterminant ».

Certains candidats (en nombre non négligeable) ont donné un domaine de définition constitué d'intervalles avec des bornes non réeles (dans $\mathbb{C}$).

2. Dans cette question, la plupart des candidats ont correctement calculé $\displaystyle\int_0^X h(t)\, dt$.

Par contre, il y a eu beaucoup d'erreurs au niveau du calcul de $\displaystyle\int_X^0 h(-t)\,dt$. De nombreux candidats ont obtenu l'opposé de la réponse correcte.

Beaucoup de candidats ont donné des résultats en ln de la valeur absolue du résultat (qui était bien strictement positif). Il est dommage que les candidats choisissent l'assurance plutôt que de se poser la question (surtout si la précédente a bien été traitée).

3. Une grande partie des candidats a correctement calculé la limite demandée. Certains l'ont fait de manière un peu compliquée, en factorisant par X^2 à l'intérieur de chacun des logarithmes, puis en effectuant un développement limité en $\dfrac{1}{X}$. Tous les calculs corrects ont obtenu les points.

   Par contre, de nombreux candidats ont obtenu le résultat attendu, mais à l'aide d'un résultat faux issu de leur réponse à la question précédente.

4. La majorité des candidats ont obtenu une primitive de la fonction considérée. Nous rappelons que $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ et qu'il est bon de simplifier les expressions lorsque cela est possible.

   Nous alertons aussi sur l'emploi parfois nécessaire des *délimiteurs* que sont **les parenthèses**, qui sont justement requis pour éviter les ambiguïtés lorsque cela est nécessaire : certains candidats donnent ainsi comme primitive la fonction « $t \mapsto \arctan\left(X - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}$ », qu'il faut en fait comprendre suivant les cas comme « $t \mapsto \arctan\left(\sqrt{2}\left(X - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ », ou « $t \mapsto \sqrt{2}\arctan\left(X - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ », ce qui n'est pas du tout la même chose.

   Nous avons aussi trouvé de nombreuses réponses complètement fausses, faisant intervenir des logarithmes ou des tangentes.

5. Les candidats ayant répondu correctement à la première question ont obtenu le domainde de définition de la fonction g.

   Si une grande partie des candidats ont obtenu une primitive correcte de la fonction g, de nombreux autres se sont trompés (facteur 2 manquant, ou facteur $\sqrt{2}$ ou $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ incorrect.

6. Beaucoup de candidats n'ont pas donné la réponse correcte à cette question.

7. Très peu de candidats (environ un quart) ont donné la valeur de la limite demandée.

8. La très grande majorité des candidats a correctement calculé, pour tout réel $t \geq 0$, $h(t) + h(-t) + g(t) + g(-t)$.

   D'autres, par contre, n'nt pas finalisé leur calcul, ou en ont laissé le soin aux correcteurs ...

9. (a) Peu de candidats ont obtenu la réponse correcte à cette question, en raison d'erreurs antérieures dans le calcul des primitives.

   (b) Nos commentaires sont les mêmes que pour la question précédente.

   Nous soulignons qu'on peut comprendre que des erreurs de calcul antérieures amènent à des résultats erronés. Toutefois, il est dommage que certains candidats trouvent que les intégrales sont nulles, voire négatives, et ne réagissent pas.

10. Peu de candidats ont obtenu la valeur correcte de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt$.

Partie II

1. (a) Dans cette question, il fallait commencer par appliquer le théorème de dérivation terme à terme des séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence (ce qui n'a pas été précisé par tous les candidats), puis, après des changements d'indices (et non de variable), utiliser le théorème d'unicité de décomposition des séries entières. Beaucoup de candidats se contentent d'écrire une suite de relations sans aucune justification, font intervenir des sommes incorrectes, à partir de 2, ou bien de -1, qui font donc intervenir elles-mêmes des coefficients b_{-1} non définis. Pour certains, le fait que des coefficients ne soient pas définis sous-entend leur nullité. D'autres candidats donnent sur leur copie des morceaux de calcul, laissant à l'examinateur le soin de les finaliser. Les relations attendues sont souvent données sans préciser pour quelles valeurs de l'entier n elles sont valables.

Enfin, un nombre non négligeable de copies confondent séries entières, polynômes, et développements limités.

(b) Les candidats ayant répondu correctement à la première question ont obtenu la relation demandée.

(c) Dans cette question, où on rappelait que les fonctions C et S étaient supposées paires, il fallait en déduire la nullité des coefficients d'indices impairs de leurs développements en série entière respectifs. Nous avons trouvé de nombreuses réponses incorrectes ou complètement fantaisistes : de nombreux candidats parlent ≪ des coefficients impairs ≫, d'autres expliquent que les coefficients sont positifs, etc ...

(d) *i.* Dans cette question, il fallait utiliser l'argument de la division euclidienne. Tous les candidats n'y ont pas pensé. Certains ont procédé par récurrence. les autres copies ont tenté des raisonnements alambiqués à partir d'exemples.

ii. Dans cette question, pour montrer que, pour tout entier naturel n qui n'est pas multiple de 4, $a_n = 0$, il fallait utiliser les résultats précédents lorsque l'entier n est impair. Lorsque n est congru à 2 modulo 4, il fallait raisonner par récurrence. Tous les candidats ne l'ont pas fait, beaucoup se sont contentés d'indiquer que ≪ c'était évident ≫.

(e) Dans cette question à nouveau, il fallait procéder par récurrence sur l'entier p pour obtenir le résultat cherché. Si un grand nombre de candidats l'ont fait, nous avons trouvé beaucoup de raisonnements compliqués lorsqu'il s'agit de démontrer le résultat au rang $p+1$. En factorisant $(4\,p+4)\,(4\,p+2)$ sous la forme $4\,(2\,p+2)\,(2\,p+1)$, on obtenait directement le résultat. Certains candidats ont développé les expressions, ce qui était inutilement compliqué.

Il y a eu fréquemment de la malhonnêteté sur l'initialisation de la récurrence, beaucoup de candidats affirmant que $a_0 = 1$, sans aucune justification (ni dans cette question, ni à la première). D'autres part, certains candidats ont initialisé la récurrence à partir de a_4 ...

Par ailleurs, nous avons trouvé un certain nombre de tentatives d'*escroquerie* à cette question, où les candidats soit ne font aucun calcul en expliquant que ≪ c'est évident ≫, ou encore, en écrivant la formule finale attendue, sans rapport avec leurs calculs.

(f) Dans cette question, il fallait déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n\, x^n$. Les candidats ne citent pas toujours le critère de d'Alembert qu'ils utilisent implicitement, et celui-ci n'est d'ailleurs pas toujours bien connu : omission des valeurs absolues, confusion entre le rapport dépendant de l'entier n et sa limite, etc ... De nombreux candidats se contentent d'une suite de calculs sans aucun argument, « $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ldots$ », parfois, il y a des valeurs absolues parfois, il n'y en a pas, parfois, les valeurs absolues sont égales à un nombre négatif, le rayon de convergence est « $R = \dfrac{1}{0} = \infty$ », etc ...

Peu de candidats ont reconnu les expressions simpifiées $C(x) = \cos(x^2)$ et $S(x) = \sin(x^2)$.

2. (a) Dans cette question, comme dans la précédente, la détermination du rayon de convergence a donné lieu à de très nombreuses réponses fausses ou incorrectes. Outre les résultats donnés sans aucune justification (rayon de convergence égal à 1, sans aucun calcul ni même référence à une série géométrique), nous avons fréquemment trouvé une suite de

$$\text{« } RCV\left(\sum (-1)^n\, x^{4\,n}\right) = RCV\left(\sum x^{4\,n}\right) = RCV\left(\sum x^n\right) \text{ »}$$

où l'expression « rayon de convergence » n'est jamais explicitement employée.

Par contre, de nombreux candidats ont bien reconnu la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}$.

(b) La grande majorité des candidats a écrit $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{1+x^4}$ en foncion de la somme d'une série numérique, comme attendu. Par contre, tous ne justifient pas l'échange des signes Σ et $\displaystyle\int$, soit à l'aide du théorème d'intégration terme à terme sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, soit, comme l'ont fait certains, en revérifiant toutes les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme plus général qui figure dans le programme.

(c) Les candidats ont, en grande partie, fait le lien entre la somme de la série et le résultat de la fin de la Première Partie, même si très peu donnent, au final, la valeur attendue.

Partie III

1. Dans cette question, il fallait montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

   Si la plupart des candidats ont répondu correctement (soit en utilisant le fait que, lorsque t tend vers l'infini, $e^{-t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, puis que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente , ou alors, à l'aide de la majoration $e^{-t^2} \leq e^{-t}$, pour tout réel $t \geq 1$), de nombreux autres candidats ont utilisé des majorations fausses ou inutilisables (la majoration $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ n'est pas valable pour tout $t \geq 0$, et une majoration par 1 ne permet pas de conclure.

2. La majeure partie des candidats ont correctement étudié la convergence des intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{t^2}\,dt$$

   Par contre, de très nombreuses copies se contentent de majorer les intégrandes (par $\dfrac{1}{t^2}$), et non leur valeur absolue. D'autres écrivent que, au voisinage de l'infini, « $\dfrac{\sin(t^2)}{t^2} \sim \dfrac{1}{t^2}$ », d'autres encore confondent les « petit o » et « grand $\mathcal{O}$ ».

3. Dans cette question, il fallait utiliser une intégration par parties pour montrer que les limites

$$\lim_{X\to+\infty} I(X) \quad \text{et} \quad \lim_{X\to+\infty} J(X)$$

   existaient et étaient finies.

   De nombreux candidats se contentent d'écrire une suite de formules : « $u = \ldots$ », « $u' = \ldots$ », etc ..., mais lorsque l'on cherche l'intégration par parties attendue, on s'aperçoit qu'elle est laissée à la charge des correcteurs, aucune relation ou égalité explicite n'étant donnée.

   Au final, un peu moins de la moitié des candidats a correctement répondu à cette question. De nombreuses réponses sont complètement fausses (faisant intervenir des intégrales nulles).

4. Les candidats ayant correctement répondu à la question précédente l'ont aussi fait pour cette question.

5. Dans cette question, il fallait donner le développement en série entière de la fonction

$$t \mapsto e^{i\,t^2}$$

Pour cela, il suffisait d'utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle, de rayon de convergence infini dans $\mathbb{C}$.

De nombreuses copies donnent le développement en série entière de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ dans $\mathbb{R}$, puis écrivent : « donc, en posant $x = i\,t$ », sans faire attention au fait que $i\,t$ n'est donc plus réel.

6. (a) Très peu de candidats ont réussi à déterminer le domaine de définition de la fonction f donnée. Il suffisait de considérer le module de l'intégrande, ce qui n'a été fait que peu souvent. Les candidats n'ont pas tous fait attention que la fontion était à valeurs dans $\mathbb{C}$, et ont écrit des inégalités avec des nombres complexes.

   (b) La majorité des candidats ont réussi cette question, à l'aide du changement de variable $t\,x = u$.

   (c) Peu de candidats ont obtenu correctement la limite attendue. Lorsque cela a été fait, nous avons noté le grand soin apporté par les candidats à la résolution de cette question.

   (d) L'étude de la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction f introduite à la question 6. (a) n'a pas toujours été bien faite. De nombreux candidats n'ont pas pris en compte le fait que la fonction était à valeurs complexes, nous avons trouvé de nombreuses copies où figuraient des inégalités avec des nombres complexes. En outre, certains candidats ont voulu majorer la valeur absolue du réel $x \in [\varepsilon, A]$ par ε.

   D'autre part, de nombreux candidats se contentent de rappeler le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres (qui semble bien connu de la majorité), mais ne donnent pas l'expression de la fonction requise dans l'hypothèse de domination du module de la dérivée partielle par rapport à la variable x.

   (e) La grande majorité des candidats a obtenu l'expression attendue de $f'(x)$.

   (f) Très peu de candidats ont obtenu les valeurs correctes des intégrales de Fresnel.