

MATHEMATIQUES B 2025

Présentation générale :

Le sujet de cette année se composait de trois exercices indépendants.

- L'objectif du premier exercice était d'étudier et de tracer une conique dont une équation cartésienne était donnée ;
 - L'objectif du deuxième exercice était de résoudre une équation différentielle du second ordre normalisée à l'aide d'outils d'algèbre linéaire ;
 - Le dernier exercice, composé de 2 parties de longueur similaire et qui pouvaient être traitées indépendamment l'une de l'autre avait pour objectif l'étude de lignes de plus grande pente sur un cône puis sur une surface de révolution d'axe (Oz).
- La répartition du barème est d'environ 20%, 30% et 50%.

La longueur raisonnable du sujet a permis à une grande majorité des candidats d'aborder le totalité des questions.

Quelques questions plus difficiles, en particulier dans la deuxième partie du troisième exercice, ont permis aux candidats les plus à l'aise de se démarquer.

On constate que le nombre de copies très faibles est resté stable par rapport à l'an dernier. Le sujet a donc permis de classer l'ensemble des candidats.

Présentation des copies :

Le nombre de candidats refusant une quelconque mise en évidence dans résultats et/ou qui parsèment leur copies de ratures (on ne parle pas ici des réponses soigneusement rayées à l'aide d'une règle) continue à diminuer.

Il est toutefois rappelé que les réponses doivent être encadrées et que les traits doivent être tracés à l'aide d'une règle.

Par ailleurs, dans un sujet de géométrie, les candidats ne doivent pas hésiter à illustrer leurs réponses par un schéma. Les candidats qui le font à bon escient sont récompensés.

Rédaction :

La qualité de la rédaction est inégale : certains points soulignés dans les rapports précédents ont été pris en compte.

En revanche, d'autres points demandent encore à être améliorés, en particulier l'usage des quantificateurs.

Ils seront évoqués dans le détail question par question.

Il y a un point qu'il convient de souligner à propos ce sujet : de nombreux candidats ont perdu des points bêtement à cause d'un manque d'attention et/ou d'une mauvaise lecture de l'énoncé.

Enfin on rappelle aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre et que, comme indiqué sur le sujet, la feuille de papier millimétré doit être rendue avec la copie (insérée au bon endroit et non reléguée à la fin de la copie, c'est encore mieux).

Premier exercice.

On compte 9% des candidats qui ont fait l'impasse totale sur cet exercice.

L'étude des coniques a clairement moins de succès auprès des candidats que l'étude d'une courbe paramétrée.

1. Question bien réussie.
2. Question bien réussie même si les sous-espaces propres ne sont pas toujours (bien) justifiés.
Quelques candidats ne donnent pas les sous-espaces propres demandés mais seulement un vecteur propre.
3. Généralement l'équation demandée est trouvée. Mais une justification minimale est attendue.
De plus on a beaucoup de mal à trouver le repère $\mathcal{R}'$ demandé (on rappelle qu'un repère de $\mathbb{R}^2$ est la donnée d'un point et de deux vecteurs non colinéaires) et lorsqu'on le trouve (ou ce qui y ressemble), il n'est pas toujours orthonormé (parfois les deux vecteurs n'ont même pas la même norme) et/ou direct.
4. Bien réussie... même si le déterminant de Q n'est pas utile pour répondre lorsque l'on dispose de l'équation réduite.
5. Les éléments caractéristiques souhaités étaient bien précisés : centre, sommets et asymptotes. Il était donc inutile de donner excentricité, directives, foyers, ... surtout à la place des éléments demandés.
Lorsqu'elles sont données - il est rare que l'on ait les 3 éléments -, les coordonnées ou équations dans $\mathcal{R}'$ sont souvent correctes... à part des confusions entre 3 et $\sqrt{3}$. Par contre, les coordonnées ou équations dans $\mathcal{R}$ ont eu peu de succès.
6. Il est dommage que les candidats soient si peu nombreux à essayer de tracer cette hyperbole... alors qu'ils en ont l'équation réduite... surtout qu'ici, on pouvait même mettre l'équation sous la forme $x = g(y)$.
Comment souvent, les correcteurs ont du mal à trouver sur le dessin les deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Par contre, sommets et asymptotes étaient bien présents (pas toujours bien placés).
Ce tracé représentait près de 30% du barème de l'exercice...

Deuxième exercice.

Partie I

1. Les candidats ont su exploiter correctement les différentes méthodes possibles pour traiter cette question.
Pour ceux ayant utilisé le discriminant (et non le déterminant), en plus d'erreurs de calcul relativement fréquentes ($4 - 4 \times (-2) = 26$ ou 30 , $\sqrt{28} = 2\sqrt{6}$, ...), il y a ceux qui ont démontré soigneusement que $\frac{\sqrt{7}-1}{3} < 1$ et ceux qui se sont contentés de l'affirmer.
2. Cette question est ratée.
Il s'agissait de démontrer un résultat du cours. La caractérisation des sous-espaces vectoriels n'est pas connue de la plupart des candidats.
Le théorème de superposition (des solutions) n'avait pas sa place ici, tout comme l'équation caractéristique.

3. Toutes les valeurs entre 0 et $+\infty$ ont été proposées.
 Parfois, même en faisant preuve de bonne volonté, il est impossible pour les correcteurs de savoir si la réponse est 1 ou 2 (les deux chiffres sont superposés, ou la réponse est trop droite pour un 2 et pas assez pour un 1).
 Les candidats sont invités à respecter la consigne « sans démonstration », cela leur évitera d'écrire des justifications totalement fausses...
 Finalement, il n'y a que 45% de réponses correctes pour cette question de cours.
4. Il serait souhaitable que :
 le calcul commence par

$$\ll (3x + 1) f_1(x) + (2 - x) f_1'(x) - \frac{x}{2}(3x^2 + 2x - 2) f_1''(x) = \gg.$$

 les candidats utilisent « $\forall x > 1$ » au(x) moment(x) opportun(s).
 les candidats écrivent « f_1 est solution de (E_H) sur $]1; +\infty[$ » et non « $f_1(x)$ est solution de (E_H) ».
 Par ailleurs, l'usage d'équivalent ($\Leftrightarrow$) n'est pas la méthode la plus adaptée pour ce type de questions dans la mesure où on n'essaye pas de résoudre une équation.

Partie II

5. Les candidats ont (presque) tous trouvé une méthode qui leur convient parmi les nombreuses possibles.
 A noter que tous les candidats ayant trouvé que la matrice est inversible ont également trouvé que son noyau n'était pas réduit à $\{0\}$ sans que cela les fasse réagir.
 Quelques points à améliorer sur la forme :
 Entre deux déterminants, il y a le signe « = » et lorsque on échelonne une matrice, le signe entre les différentes matrice est « $\sim$ » ou « $\underset{L}{\sim}$ »
 Pour les candidats qui échelonnent la matrice
 il est inutile d'échelonner la matrice augmentée $(A|I)$;
 les calculs ne sont pas toujours finis et la raison de la non inversibilité de A pas toujours mise en évidence.
 C'est une bonne idée d'annoncer la méthode que l'on veut utiliser mais le faire avec la propriété (juste) « une matrice est inversible si son déterminant est non nul » n'était pas adaptée ici.
6. Les systèmes doivent être résolus par équivalence (entre 2 systèmes, pas entre un espace vectoriel et un système).
 Quant aux candidats qui utilisent les opérations sur les colonnes, ils doivent justifier correctement la dimension du noyau ($C_1 = C_2 + C_3$ ne justifie pas que le rang de la matrice vaut 2).
7. De nombreuses confusions avec les invariants.
 Ceux qui ont choisi la vision géométrique s'en sont mieux sortis que ceux qui ont choisi la vision algébrique. Dans ce second cas, ce n'était en général pas convaincant et mal rédigé (et il n'est pas certain que sans la réponse qui figurait dans l'énoncé, l'équation aurait été trouvée).
8. Peu traitée et ceux qui la traitent fournissent rarement une justification...
 S_1 est un peu mieux justifié que S_2 .
9. De nombreuses erreurs dans la résolution de ce système.
 L'expression « résoudre » demande de trouver toutes les solutions et pas seulement

une seule.

Par ailleurs, pour « résoudre » un système, il ne suffit pas de le transformer en un système équivalent, il faut également décrire les solutions ou l'ensemble des solutions. Autrement dit : lorsque les calculs sont finis, il convient d'écrire une conclusion... d'autant qu'il est constaté que celles qui sont écrites sont régulièrement inexactes.

Partie III

10. Les correcteurs ne terminent pas les calculs à la place des candidats...
La question 12 a permis aux candidats de rectifier quelques erreurs de développement.
11. La définition est mal connue.
De plus, si démontrer que $\varphi(0) = 0$ est inutile (mais correct), les phrases « $0 \in \varphi$ » ou « $\varphi \in \mathbb{R}_2[X]$ » n'ont pas de sens.
Par ailleurs, trop de candidats se contentent d'affirmer que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ sans justification, ce qui n'était pas si évident ici, sans compter que les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ ne sont pas tous de degré 2.
Les candidats utilisent trop peu la question 10. pour cela (et cela doit être fait après la linéarité).
12. Question qui n'a pas posé de problème particulier.
13. Les éléments du noyau de A ont trop rarement été transformés en polynômes pour donner les éléments du noyau de φ et lorsque cela a été fait, le « Vect » a souvent disparu.
La solution demandée de $\varphi(P) = 3(1 + X + X^2)$ est davantage donnée sous forme de polynôme.
A noter que l'on demandait UNE solution, pas toutes les solutions.

Partie IV

14. Cette question synthèse a été très peu traitée.
 S et S_H sont des ensembles, pas des fonctions.
L'indépendance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto -2 + x + x^2$ est oubliée et on note des incohérences avec la question 3.

Troisième exercice.

On constate, dans cet exercice, de très nombreuses confusions entre les différents objets. Ainsi, il n'est pas rare que les candidats s'intéressent à $M(-t)$ de Γ dans la première question de la partie 1 alors que cette question porte sur S .

Un effort, encore perfectible, est constaté sur la rédaction de « $A \in S$ » ou de « $\Gamma \in S$ », en particulier chez ceux qui calculent séparément les deux cotés de la relation et qui constatent leur égalité.

Par ailleurs, les candidats ont majoritairement défini (plus ou moins bien) les fonctions issues des équations de surfaces, afin de ne pas dériver ces dernières. On les en félicite.

Par contre, c'est bien moins fait pour les courbes et on signale que dans ce cas, on ne calcule pas de gradient.

Partie I

1. (a) Comme toujours dans cette question, des confusions avec l'intersection (ou plus rarement la symétrie par rapport à l'axe des abscisses).
Les démonstrations ne sont pas toujours convaincantes.
- (b) Il n'est en général pas possible de savoir si les candidats ont vérifié que le point trouvé appartient à la surface.
Attention : la phrase « O est un point non régulier de S » est correcte mais ne constitue qu'une réponse incomplète à la question.
- (c) Attention à ne pas oublier la moitié de la question...
Comme cette question est posée tous les ans, la méthode commence à être largement acquise.
Même s'il reste encore des équations qui ne sont pas des équations de plan, il ne reste presque plus de plan qui ne passent pas par le point A .
Il est rappelé que les équations doivent être développées et simplifiées.
Par contre, environ la moitié des candidats s'est trompée dans l'évaluation du gradient en A alors que celui-ci avait été bien calculé : $(x, -y, -z)$ a été évalué au lieu de $(x, -z, -y)$...
- (d) Ceux qui ont traité la question ont en général bien traduit la condition de parallélisme mais ont oublié de vérifier que le point était dans S ...
- (e) La condition d'orthogonalité a été un peu moins bien traduite mais davantage de candidats ont pensé à placer le point sur la surface (mais sans les alerter pour la question précédente).
2. En faisant plus attention au domaine parcouru par t , les candidats auraient gagné du temps.
De nombreuses ambiguïtés quant au nombre de coordonnées qui ne doivent pas être nulles...
3. Les quantificateurs sont trop souvent absents...
4. (a) La valeur est souvent trouvée, pas toujours de façon efficace et à l'aide de « $\Leftrightarrow$ » pas très justes.
- (b) Bien traitée lorsqu'elle l'a été.
- (c) Les candidats m'ont pas réussi à se détacher du fait que dans cette question $M(t)$ n'était plus vu comme un point de Γ mais comme un point de Γ_a .
- (d) Peu traitée.
Mieux vaut dire que l'on ne trouve pas $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et admettre qu'il doit y avoir une erreur dans les calculs et/ou les questions précédentes plutôt que de tenter un coup de bluff.

Partie II

1. (a) De nombreux candidats ont absolument voulu introduire $f(t)$ et $g(t)$ dans cette question et/ou se sont débarrassés d'une équation transformant une courbe en surface et/ou ont voulu trouver une représentation paramétrique et ont fini par donner Γ .
La tangente à une courbe définie comme intersection de 2 surfaces semblent bien peu connue.
On trouve régulièrement des vecteurs n'ayant que 2 coordonnées !
- (b) Rares sont les candidats qui ont justifié que l'ont pouvait utiliser la question précédente... c'est à dire que le point $M(t)$ était régulier.

- (c) L'expression en fonction de Φ est correcte, celle en fonction de φ beaucoup moins.
 - (d) Peu traitée.
Invoquer un produit vectoriel pour trouver coûte que coûte l'expression demandée n'est pas une bonne idée.
2. (a) La plupart des candidats écrivent les hypothèses et en déduisent sans aucune démonstration la conclusion.
D'autres écrivent qu'une fonction qui ne s'annule pas est de signe constant sans aucune indication des propriétés de régularité de ladite fonction.
Plus rarement, il est cité « d'après le théorème des valeurs intermédiaires » mais toujours sans ses hypothèses ou « d'après le théorème de Rolle » !.
Enfin, certains candidats évoquent le sens de variation de $(x, y) \mapsto h(x, y) \dots$
- (b) Les hypothèses et la conclusion du théorème de la bijection (quelque soit le nom sous lequel les candidats le connaissent) sont très mal connues.
Certes, le comportement de h sur $\mathbb{R}^{-*}$ n'était pas connu, cela n'empêchait pas de dire que $h(t_0) = \alpha$ n'avait pas de solution sur $\mathbb{R}^+$ lorsque $\alpha \notin h(\mathbb{R}^+)$.
 - (c) Comme d'habitude quand cette question est posée, les candidats se débarrassent de l'équation du plan et fournissent un centre à 2 coordonnées.
On a vu régulièrement : $\alpha = h(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{\alpha}{h} \dots$
 - (d) Les explications sont souvent peu claires, incomplètes avec des confusions entre $\cap$ et $\cup \dots$
3. Peu traitée... et rarement réussie, avec quelques $\frac{f'}{g'} = 0 \dots$
4. Peu traitée mais plutôt réussie.
5. (a) Cette question de cours est placée trop loin dans le sujet pour que l'on puisse évaluer sa connaissance par les candidats.
On note quand même des confusions avec les parallèles, les génératrices (et non directrices), et il ne s'agit pas toujours d'une courbe.
- (b) Peu traitée.