

Rapport – Mathématiques A – Banque PT 2025

Remarques générales

Dans ce rapport le terme *candidat* désigne un candidat ou une candidate.

Le sujet comprenait deux exercices. L'exercice 1 portait sur les polynômes de Legendre et faisait intervenir des méthodes classiques d'algèbre linéaire. L'exercice 2 portait sur des probabilités discrètes et couvrait une vaste partie du programme de probabilité des deux années de classe préparatoire. Chaque exercice comptait pour environ la moitié des points de barème et des points *bonus* ont récompensé les copies présentant une bonne présentation et une bonne rédaction.

L'exercice d'algèbre a été bien mieux traité que celui de probabilités, partie qui semble comme chaque année être une impasse pour certains candidats. Ainsi plus de 12% des copies n'ont aucun point sur cet exercice (5% n'abordent pas l'exercice et 7% l'abordent mais n'ont aucun point). En revanche la quasi-totalité des copies aborde l'exercice d'algèbre et répond correctement à quelques questions (moins de 1% n'a aucun point sur cet exercice). A l'inverse, certaines copies excellentes ont fini le sujet et ont l'intégralité des points de barème.

Comme chaque année, nous insistons sur la présentation des copies : les résultats doivent être encadrés à la règle, les ratures évitées et les calculs non aboutis correctement barrés (éviter de mélanger ratures et résultats qui doivent être lus). Il en est de même pour la rédaction : les calculs doivent être justifiés, en particulier lorsque le résultat demandé est donné dans l'énoncé. En particulier, il est demandé de terminer les calculs : on trouve dans les réponses finales des candidats : $2n - n$, $2n + n(n - 1)$, $4(X^2 - 1) + 8X^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k}$ ou encore $p^k(1 - p)^{n-k}$ avec $p = \frac{1}{2}$.

Enfin, une attention doit être portée sur l'orthographe et la conjugaison (erreurs fréquentes : "on pert", "peut importe", "la probabilité qu'il est gagné", "Bernouilli"). On ne dit pas "c'est une bernoulli", une variable aléatoire n'est pas une loi (elle suit une loi). On voit des calculs amorcés non aboutis, voire inutiles, des phrases alambiquées qui se terminent par "bref..." : le brouillon sert à éviter cela.

Remarques particulières

Exercice 1

Préliminaire

1. (a) Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.

Il fallait justifier que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ ce qui a parfois été oublié. La linéarité est parfois oubliée (constat également vu dans l'épreuve de Mathématiques B). Certains candidats pensent qu'il faut montrer que $\varphi(P)$ est de degré $\deg(P)$, ce qui est faux. D'autres pensent que tous les polynômes sont de degré 1 ou de degré 2 ou confondent $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$.

Pour la linéarité, il est maladroit d'appeler le deuxième polynôme X ou P' . Par ailleurs, en écrivant $\lambda \in \mathbb{K}$, il faut préciser qui est $\mathbb{K}$.

- (b) Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.

Les simplifications ne sont pas toujours faites pour $\varphi(X^n)$. Attention à ne pas utiliser de factorisations avec X^{-2} , qui n'est pas un polynôme.

Partie 1

2. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.
La deuxième dérivée a parfois été oubliée pour P_2 .
3. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.
On note parfois des récurrences inutiles ou qui n'en sont pas : l'absence d'utilisation de la propriété de récurrence doit alerter.
4. (a) Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.
(b) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
On note beaucoup de parenthèses oubliées et des confusions sur l'ordre de dérivation (p et non pas n) et les objets considérés (polynômes et non fonctions).
(c) La calcul de $\binom{n}{2}$ a semblé poser problème. Attention aux rédactions un peu malhonnêtes, surtout quand la formule de Leibniz est incorrecte.

Partie 2

On note une confusion entre N et n dans cette partie. Globalement la réduction des matrices n'est pas maîtrisée, et très souvent il y a des confusions entre les objets (vecteurs, valeurs, espaces propres).

5. La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
Les polynômes de $\mathbb{R}_N[X]$ ne sont pas tous de degré N : sans argument supplémentaire, vérifier que $\deg \varphi(P_N) = N$ ne suffit pas. De même, la vérification pour $\varphi(X^N)$ ne suffit pas sans détail supplémentaire. La linéarité de φ_N n'avait pas besoin d'être prouvée.
6. La taille de la matrice est souvent incorrecte. Peu de candidats se rendent compte que le calcul nécessaire a déjà été effectué à la question 1 (b), en particulier ce n'est pas le calcul $\varphi(P_n)$ qui est demandé. Attention à ne pas prendre l'initiative de poser $N = 2$ ou 3 lorsque le résultat est demandé pour N quelconque.
7. Cette question est très classique en réduction, cependant de nombreuses erreurs sont à signaler :
 - Il arrive régulièrement que les valeurs propres ne soient pas données alors que le polynôme caractéristique est calculé ou qu'il est annoncé qu'elles sont les éléments de la diagonale.
 - Si l'argument principal est de dire que les valeurs propres sont toutes simples, il faut prouver qu'elles sont distinctes.
 - "Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples" est une condition suffisante, pas une condition nécessaire et suffisante de diagonalisation.
 - On trouve régulièrement un spectre de cardinal infini. Certains candidats ne veulent pas que 0 soit valeur propre bien qu'il soit sur la diagonale.
 - Rappelons qu'il n'y pas de lien entre "0 est valeur propre" et "la matrice est diagonalisable".
 - Utilisation fréquente du polynôme caractéristique (avec des candidats qui se perdent en cherchant à calculer un déterminant via des opérations élémentaires) : cette notion n'est pas utile ici.
 - Plusieurs apparitions de théorèmes grossièrement faux, du genre "la matrice est triangulaire supérieure donc diagonalisable".
8. La dimension du sous-espace propre est peu justifiée, souvent une seule inclusion est donnée. On note une confusion entre P_n et $\text{Vect}(P_n)$.
9. Résultat souvent non justifié ou parfois seulement une inclusion.

Partie 3

10. La majorité des candidats a correctement traité cette question mais seul un cinquième a tous les points de barème.

Cette question est très classique et il est attendu une rédaction claire des candidats. En particulier, le point le plus difficile consiste à prouver le caractère défini et les points suivants doivent être clairement établis :

- P^2 est positive et continue sur $[-1, 1]$ donc $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = 0$ implique $P^2(t) = 0$ sur $[-1, 1]$,
- P est alors un polynôme avec une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

Notons également les fréquentes imprécisions suivantes : le fait que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ est peu précisé, la bilinéarité est parfois rédigée de façon trop minimale. D'ailleurs, ce n'est pas $\langle P, Q \rangle$ qui est bilinéaire. Enfin, P^2 n'est pas une fonction paire.

11. (a) Les candidats ont souvent pensé à l'intégration par parties, mais n'ont pas toujours utilisé la bonne expression de $\varphi(P)$. On note par ailleurs des mélanges dans les notations entre X et t : on voit apparaître $(X^2 - 1)P'_n(t)P'_m(t) dt$.
- (b) L'utilisation de $n \neq m$ n'est pas toujours bien expliquée.
12. (a) Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.
Les notations $mult(1)$, $m(1)$, $\mu(1)$ ou $\lambda_{(m)}$ ne sont pas universelles : il faut les définir au préalable. De plus, elles peuvent être évitées ici car ne font pas gagner de temps. Il est incorrect de dire que les racines sont $\{-1, 1\}$.
- (b) Peu de candidats ont pensé à faire des intégrations par parties successives et la nullité du crochet est peu justifiée. Une rédaction sans récurrence et expliquant les principales étapes du raisonnement était acceptée.
- (c) Un calcul pour une petite valeur de n permettait de repérer une éventuelle erreur de calcul. Attention, $2n! \neq (2n)!$.
- (d) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
Quelques erreurs, sans doute d'inattention : normes négatives, $\sqrt{(-1)^2} = -1...$
13. Il est souvent justifié que la famille proposée est orthonormée, parfois qu'elle est libre et rarement que c'est une base.

Exercice 2

Les probabilités semblent toujours poser de grandes difficultés à une majorité des candidats : les trois premières questions, bien que très classiques, ne sont correctement traitées que par une minorité. Nous rappelons qu'il faut bien prendre le temps de lire le sujet et de comprendre la situation qui est modélisée. Bien que le jeu présenté n'ait aucun intérêt pour les joueurs (l'espérance de gain est inférieure à la mise, ce que peu de candidats ont noté), la modélisation permettait de tester les méthodes classiques des probabilités discrètes.

Dans cet exercice k était particularisé pour un joueur particulier, il était donc maladroit d'utiliser cette lettre comme indice des sommes. Nous notons quelques erreurs et imprécisions courantes en probabilités :

- Beaucoup de *retro-engineering* et de probabilités annoncées pour que cela colle au reste de l'exercice.
- L'expression "par indépendance" doit être remplacée par une phrase où les objets indépendants sont clairement identifiés.

- Ne pas utiliser "proba(s)" au lieu de "probabilité(s)".
- L'écriture $\overline{P(A)}$ est incorrecte. L'intersection de deux variables aléatoires ou de deux probabilités n'existe pas.
- $\mathbf{E}(X) = \sum x_i \mathbf{P}(X = x_i)$ n'est pas la formule de transfert et $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(A)$ n'est pas la formule de Bayes. Par ailleurs la notion de probabilité conditionnelle semble se réduire à sa définition pour de nombreux candidats.
- La formule des probabilités totales est en particulier assez mal connue et fait très souvent intervenir uniquement des probabilités conditionnelles.
- Confusions entre "événement" et "variables aléatoires"
- Entre deux événements on utilise le signe $=$ et non $\Leftrightarrow$.

Partie 1

1. La majorité des candidats a correctement traité cette question mais moins d'un sixième a tous les points de barème.

Comme souvent dans les exercices de probabilité, on assiste à des annonces sans argumentation pour citer des lois usuelles (uniforme, géométrique, Poisson...) qui n'ont pas de lien avec la situation décrite. Pour conclure avec la loi binomiale il est nécessaire de mentionner l'indépendance. On note cependant un effort de justification lorsque la bonne réponse est donnée.

Le nom des lois doit être donné, avec leur paramètre, pas uniquement leur notation, il est d'ailleurs parfois difficile de trouver la valeur de p (celle-ci n'est pas toujours explicitement mentionnée sur la copie).

2. La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.

Les arguments du type " S prend au minimum la valeur... et au maximum la valeur..." sont à éviter ici sachant que S ne peut prendre que deux valeurs. Cela devient faux lorsqu'il est mentionné que S prend ses valeurs entre 0 et n . Nous avons constaté $S(\Omega)$ parfois incomplet ou $\mathbf{P}(S = 0)$ pas toujours justifiée. S ne suit pas une loi de Bernoulli (ou une autre loi usuelle) : l'univers image ne convient pas.

3. Moins d'un tiers des candidats qui ont traité cette question y a, au moins partiellement, bien répondu.

L'indépendance des X_i n'est pas utile pour la linéarité (et fausse ici), les X_i suivent la même loi mais elles ne sont pas égales. Rappelons que l'espérance d'un quotient de variables aléatoires n'est pas le quotient des espérances.

4. Quelques erreurs dans le sens de variation. Les candidats utilisant un argument de "bon sens" ont pris en compte l'augmentation de la mise ou l'augmentation du nombre de joueur (et donc de gagnants) mais rarement les 2 ensembles.

Partie 2

5. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.

La justification est souvent absente.

6. (a) Quelques candidats ont vu qu'il s'agissait de mettre le joueur k de côté mais n'ont pas toujours su le formaliser. Plus généralement, la notion de loi conditionnée par un événement semble mal connue. Attention aux réponses sorties de nulle part pour essayer de coller à la question suivante.
- (b) Les candidats ne se laissent pas suffisamment guider par l'énoncé et n'utilisent pas l'indication donnée.

7. La formule du binôme de Newton n'est pas toujours bien utilisée ($n = 0$ ou confusion p^n et p^i). Sur un certain nombre de copies, les candidats somment $\mathbf{P}(X_k = n/i) * (n/i)$ pour i qui débute à 0.
8. En probabilité, l'indépendance de 2 variables aléatoires repose sur une définition précise (où la probabilité intervient) et peut donner des résultats incohérents avec ce que le "bon sens" appelle indépendant.

Partie 3

9. (a) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
La première est mieux justifiée que la seconde.
- (b) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
La formule des probabilité totales est mal connue et son système complet d'événements souvent oublié. Quelques candidats concluent pour $P(T = n)$ sans vraiment avoir vu l'identité remarquable.
- (c) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
- (d) La définition de la covariance reste mal connue et le calcul de $\mathbf{E}(ST)$ a posé des problèmes. Rappelons que $\text{Cov}(S, T) = 0$ n'entraîne pas que S et T sont indépendants, et $\mathbf{E}(S, T)$ n'a pas de sens.
10. La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
11. La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.
Les candidats ont souvent compris qu'il fallait comparer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Z)$ avec parfois des discussions sur le fait que le joueur a perdu à l'aller.

Partie 4

12. (a) Une majorité de $\{0, N\}$ parfois $\llbracket 0, N \rrbracket$ ou $[0, N]$ alors que N est une variable aléatoire.
La bonne réponse est rarement justifiée. Des réponses fausses sont en contradiction avec ce qui est fait dans les questions suivantes.
- (b) De nombreux candidats traitent le cas $i \neq j$, trouvent 0, et pensent alors que l'autre probabilité vaut 1.
- (c) Cette question, difficile, a été correctement traitée par quelques candidats. Néanmoins, $\mathbf{P}(U = 0)$ est souvent oubliée.
13. Les candidats ayant correctement traité la question précédente ont également résolu cette question.
14. Certains candidats évoquent la non rentabilité du jeu si on prend en compte la mise.