MATHEMATIQUES A

Présentation générale :

Le sujet de cette année consistait en deux problèmes indépendants : l'un de probabilités, avec trois parties indépendantes et l'autre d'algèbre constituant respectivement 60% et 40% du sujet.
Le problème de probabilités abordait une très large partie du programme de probabilités de PTSI/PT : probabilités, variables aléatoires finies et discrètes, lois usuelles, couples de variables aléatoires.
Le second problème s'intéressait à la méthode des moindres carrés et était donc tourné vers l'algèbre bilinéaire. Il se terminait par une application industrielle de la méthode.
La longueur du sujet pourra avoir été ressentie diversement en fonction de l'aisance des candidats devant les calculs.

Les deux problèmes comportaient de nombreuses applications directes du cours. Il a été constaté que la connaissance de celui-ci laissait souvent à désirer.
Cela donne l'impression que certains candidats font des impasses sur certains points du programme (peut-être en fonction des écoles souhaitées)... il est rappelé que tous les points du programme peuvent tomber à l'oral.
En particulier, 6% des candidats n'obtiennent aucun point en probabilités, soit 8 fois plus qu'en algèbre - dans les 2 situations, les deux tiers des candidats n'ayant eu aucun point ont fait l'impasse sur le problème considéré.

Il a également été constaté de nombreuses réponses incorrectes ou incomplètes faute d'avoir lu attentivement l'énoncé et que dans les questions où il est demandé de démontrer deux résultats, il en manque souvent un.

Bien que l'on ait trouvé peu de très bonnes copies, l'épreuve a parfaitement permis de classer les candidats.

Présentation des copies :

Cette année figurait pour la première fois dans l'en-tête du sujet la mention : « les questions non correctement référencées ne seront pas notées ».
Cela a sans doute incité un grand nombre de candidats à faire attention, même si l'on rencontre encore des copies où il n'est pas indiqué quel est le premier problème traité et quelques unes qui font des allers-retours entre les 2 problèmes sans que cela soit bien clair.
Par ailleurs, il est conseillé aux candidats qui sont amenés (oubli, erreur détectée, ...) à rédiger une question sur une autre page que celle qui serait naturelle d'indiquer au correcteur où elle a été traitée.

La proportion des candidats qui obtiennent le maximum de points en présentation a légèrement augmenté, et il est surtout constaté une nette diminution des candidats qui n'obtiennent aucun point.
Les futurs candidats sont donc invités à poursuivre dans cette voie.

Par contre, il a été constaté que l'orthographe et la grammaire se sont dégradées dans un nombre grandissant de copies obligeant les correcteurs à lire plusieurs fois ce qui est écrit pour parvenir à faire abstraction des fautes rencontrées, ou à lire le texte à haute voix pour en comprendre le sens : « il à eût tirer », « avant qu'Alice est mangé 2 bonbons »... sans parler des orthographes diverses du mot « menthe » (mant, ment, mente, manthe, menthe) - pour ne citer que celui-ci - qui est pourtant écrit dans le sujet.

On trouve aussi régulièrement des phrases que, même avec la meilleure volonté, les correcteurs ne parviennent pas à comprendre : « la probabilité que les autres qui a mangé le bonbon est nul ».
Il serait également souhaitable d'éviter les « on a que » ou « on a ... qui ... ».
De plus, il est rappelé que les noms propres s'écrivent avec une majuscule : Bernoulli, Gram-Schmidt, Poisson, Gram-Schmidt, ..., Alice et Cyril... Et l'orthographe des noms de tous les mathématiciens précédemment cités devrait être correcte !

Rédaction :

Quelques conseils de rédaction que le jury aimerait voir appliqués :

- Les notations de l'énoncé doivent être respectées, en particulier celle du produit scalaire qui était φ et non $(\,|\,)$ ou $\langle\,,\,\rangle$.

Si les candidats ont besoin de notations qui ne figurent pas dans l'énoncé, ils doivent les définir et utiliser dans la mesure du possible des notations qui ne prêtent pas à confusion.
En particulier, il aurait été souhaitable que les paramètres des deux lois géométriques de la partie B du problème de probabilités ne s'appellent pas tous les deux p et que le « deuxième » polynôme utilisé pour démontrer la bilinéarité du produit scalaire ne soit pas noté P'.

- De même les consignes de l'énoncé doivent être respectées. Une réponse, même juste, qui ne respecte pas les consignes ne peut pas être prise en compte.

En particulier, si une question commence par « en déduire », toute réponse n'utilisant pas la ou les réponses aux questions précédentes ne peut convenir.

- Tous les résultats et calculs doivent être justifiés. On trouve bien trop souvent, surtout en probabilités des affirmations sans preuve.

Par ailleurs, quand un résultat est fourni par l'énoncé, il est impératif que le détail des calculs figure sur la copie afin de convaincre le correcteur que le candidat ne cherche pas à bluffer.

- Les correcteurs apprécient que le candidat annonce quel est son objectif et encore plus que le candidat, à l'issue de ses calculs, termine la question par une conclusion (qu'il encadre) et non par l'un des nombreux « CQFD » qui ont fleuri cette année sur les copies.
- Les candidats doivent réfléchir à la nature des objets mathématiques qu'ils manipulent. Ainsi, cela leur évitera d'écrire des égalités entre des objets de différentes natures ou d'écrire des phrases comme « les probabilités z_A et z_B forment un système complet d'événements ».
- Les fractions doivent être mises sous forme irréductibles : il a été rencontré trop de lois de Bernoulli de paramètre $\dfrac{19}{38}$, de lois géométriques de paramètre $\dfrac{6}{16}$ ou d'espérance de Z_2 égales à $\dfrac{15}{3}$.

Les auteurs des sujets se réservent la possibilité pour les futures sessions de prévoir dans le barème une pénalité pour les candidats qui ne simplifient pas les fractions (ainsi que les racines carrées), avec une tolérance pour les lois de probabilités où toutes les probabilités pourront être laissées au même dénominateur (le plus petit possible).

D'autres remarques et conseils concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Par ailleurs, il était possible dans ce problème de vérifier très rapidement la cohérence de nombreux résultats obtenus.
Nous invitons les candidats à le faire et en cas d'incohérence, à reprendre leurs calculs ou

au minimum à indiquer au correcteur pourquoi ils pensent que leurs résultats sont faux.

Problème I : Probabilités.

Partie A

1. (a) Les candidats ont généralement reconnu la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ même si parfois la valeur du paramètre p n'est pas donnée ou cachée au milieu des phrases précédentes (quand on a un semblant de justification, ce qui est rare).
   Des confusions entre loi de Bernoulli, épreuve de Bernoulli et aussi variable aléatoire sont constatées.
   Il y a eu quelques lois binomiales avec une valeur de n souvent non précisée ou égale à 20, et quelques lois uniformes de paramètres 2 ou $\frac{1}{2}$. Les lois binomiales de paramètres $n = 1$ et $p = \frac{1}{2}$ ou la loi uniforme sur $\{0, 1\}$ ont été acceptées.
   Il est demandé aux candidats de donner d'abord le nom de la loi en toutes lettres, et ensuite, s'ils en ont besoin, ils pourront utiliser les notations usuelles.

   (b) Il est conseillé dans cette question de donner les valeurs en fonctions du (des) paramètre(s) puis de faire les applications numériques. Ces résultats étant au programme, aucune démonstration n'est demandée.
   La valeur de l'espérance est bien connue, celle de la variance un peu moins.
   Il a été constaté qu'un nombre de plus en plus important de candidats ne font pas les applications numériques, ce qui est sanctionné.

2. (a) Il était attendu ici, la formule des probabilités conditionnelles avant de faire le produit $\frac{1}{2} \times \frac{10}{19}$.
   Il a été constaté des confusions entre les notations $P(X_A = 0, X_C = 0)$ et $P(X_C = 0|X_A = 0)$.

   (b) L'expression « loi conjointe » semble inconnue à de nombreux candidats... pourtant la question précédente les guidait.
   La synthèse des résultats sous forme de tableau est acceptée.

3. Pour obtenir la totalité des points, les candidats devaient citer la formule des probabilités totales et écrire le système complet d'événements associé... ce qui est fait par à peine un candidat sur six.
   Peu de candidats signalent reconnaitre une loi de Bernoulli.

4. (a) Moins d'un candidat sur deux traite cette question, ne serait-ce qu'en écrivant la définition de la covariance.
   Pour ceux ayant écrit cette définition, il est ensuite constaté que le calcul de l'espérance de $X_A X_C$ pose souvent problème.

   (b) Un grand nombre de candidats a su exploiter correctement le résultat de la question précédente (ou ceux de la question 2) malgré quelques « si et seulement si »

5. Les candidats ont souvent oublié un cas dans leur énumération et donc n'établissent qu'une inclusion.

6. (a) Les candidats qui se sont posés la question de savoir ce que représentait la variable Y ont répondu efficacement à cette question, les autres ont souvent perdu du temps en étudiant de multiples cas, sans toujours parvenir à la bonne réponse.
   (b) Les candidats semblent savoir qu'une variable aléatoire constante est indépendante de toutes les autres (bien que cela soit pas un résultat explicite du programme et donc pas la méthode attendue)... Ceux qui ont tenté de le justifier ont rarement été convaincants.
   (c) Ceux qui connaissent la définition de le covariance ont bien traité cette question.
   (d) Beaucoup d'inégalités strictes qui sont rarement justifiées (et qui n'étaient pas demandées).
   A noter que quelques candidats pensent que le signe de la variance dépend des valeurs prises par la variable aléatoire.
7. Des explications souvent peu claires de la forme « tel truc correspond à... donc la formule donnée par l'énoncé est correcte ».
   La notation $\overline{X_C}$ pour désigner $1 - X_C$ n'existe pas.
8. Si la linéarité de l'espérance est bien connue, par contre, il n'en est pas de même pour la relation entre la variance de $(X + Y)$ et la covariance de (X, Y), ce qui a conduit les candidats à déterminer la loi de Y_A.
9. A l'exception des candidats qui prennent sans justification $n = 2$ et/ou $p = \frac{1}{2}$ ou ceux qui affirment que pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale le quotient de la variance par l'espérance est un entier, les candidats ayant traité la question sont arrivés au résultat souhaité.

Partie B

1. (a) Les candidats ont majoritairement reconnu une loi géométrique avec le bon paramètre (dont la valeur est parfois cachée dans les explications) - même si cette année, on a vu apparaitre quelques lois géométriques avec deux paramètres, n (inconnu) et p - et une amélioration est constatée concernant l'univers image et les probabilités associées.
   Par contre, la justification est souvent absente ou se limite à « on reconnait la loi du premier succès » ce qui n'est pas suffisant puisque la loi « du premier succès » dépend des conditions dans lesquelles les expériences sont réalisées.
   (b) La valeur de l'espérance est relativement bien connue, celle le la variance beaucoup moins. Les candidats sont invités à définir q.
   Ici aussi, nombreux sont les candidats qui donnent les formules et qui ne font pas les applications numériques !
   (c) Le résultat étant donné, les candidats sont arrivés au résultat, la plupart du temps en rajoutant au moins deux étapes.
   En ce qui concerne D_1, il n'est pas suffisant de déterminer le rayon de convergence de la série entière.
   (d) Beaucoup d'erreurs car les candidats ne font pas attention à la borne inférieure de la somme de la série.
   De plus, de nombreuses expressions proposées ne sont pas simplifiées : présence d'une fraction de fractions et/ou d'une soustraction.

(e) L'expression des coefficients d'une série entière à l'aide des dérivées en 0 de sa somme est bien peu connue des candidats.
Si $G_1(0)$ vaut souvent 0, il est aussi régulièrement égal à p ou q ou $\frac{p}{q}$...

2. Lorsque la question est traitée, la plupart des candidats reconnaissent la loi. Le reste des résultats est cohérent avec ceux annoncés dans les questions précédentes.

3. (a) Z est souvent comprise mais la formulation parfois maladroite ou ambiguë (le dernier bonbon tiré compte-t-il ?).
La linéarité de l'espérance est souvent citée (parfois avec l'argument de l'indépendance de Z_1 et Z_2.)

(b) Peu de bonnes réponses. On trouve même des univers-images finis.

(c) La somme est plus souvent proposée que le produit... et le produit rarement justifié par l'indépendance des variables aléatoires.

(d) La formule de Leibniz est très peu connue (la somme commence presque toujours à 1, quelquefois à 2) et presque jamais justifiée.

(e) Très peu traitée. Ceux qui la traitent ne font pas attention au fait que la valeur de $G_1^{(k)}(0)$ n'a pas la même expression suivant que k est nul ou non.

(f) Voir la question 1.(e)

(g) Là aussi, les candidats ne font pas attention à la borne inférieure de la somme définissant l'espérance.

Partie C

1. La réponse se trouvait dans l'introduction du sujet.
La justification donnée a souvent été une paraphrase de la question en remplaçant les proportions par le nombre de bonbons ou des pourcentage ou des probabilités (avec (a, c) est un système complet d'événements !).

2. (a) On trouve trop souvent des signes $+$ ou $\times$ entre les événements et ainsi que de nombreuses erreurs dans les indices.
Le protocole concernant les tirages n'a pas toujours été compris.

(b) Le résultat est bien peu justifié et de nombreux candidats disent que les événements M_n et N_n (n fixé) étaient indépendants.

(c) Ceux qui ont compris le protocole ont généralement bien répondu avec malgré tout un vocabulaire ou des notations pas toujours exacts : C_{2p} n'existe pas, est nul ou négligeable ou presque impossible ou ... et $C_{2p} = \{\varnothing\}$.
Quant aux autres, c'est souvent la question 4. qu'ils font ici.

3. Il était attendu que les candidats fassent le lien entre $(X = 1)$ et les événements C_{2p+1} et qu'ils précisent que les événements C_{2p+1} étaient disjoints.
Il a été noté quelques « arrangements » dans les questions précédentes pour parvenir au résultat demandé.

4. Le raisonnement, similaire à celui des questions précédentes, est bien mis en place mais il est constaté une fois de plus que les candidats « arrangent » ou « ignorent » les indices des unions ou des sommes pour arriver au résultat demandé.

5. Rares sont les candidats qui terminent le calcul et parviennent à 0.
Pour ceux-là, l'interprétation est généralement correcte.

6. La plupart des candidats s'arrêtent à $a^2 = c$ et donc ne répondent pas à la question. Ceux qui arrivent au bout, éliminent la solution négative (pour a ou c), et oublient régulièrement de vérifier que l'autre est entre 0 et 1.
On trouve quelques candidats qui signalent que a devrait être un rationnel.

Problème II : Algèbre.

1. (a) Sauf exceptions, les candidats ont pris soin de détailler les étapes.
   (b) Peu d'erreurs à l'exception des écritures incorrectes : $X \times -(X-2) \times -\frac{1}{2}(X-3)$ ou $X(X-1)(X-3) - \frac{1}{2}$.
   (c) Dans une question comme celle-ci, il est conseillé de faire figurer sur la copie au moins les premiers calculs puis d'abréger.
   Cela aurait évité les nombreux : $\forall (p, k) \in [\![0\,;3]\!]^2,\ L_p(k) = 0$.
   A noter qu'un candidat sur six ne traite pas cette question.
2. (a) Une grande majorité des candidats savent qu'ils doivent démontrer que φ est bilinéaire (et non billinéaire), symétrique et définie-positive et démontrent correctement que φ est bilinéaire, symétrique et positive.
   Par contre, beaucoup oublient de justifier que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (et non $\mathbb{R}_3[X]$ ou $\mathbb{R}_6[X]$).
   Quand au caractère non dégénéré, il est peu justifié ou alors, on a des arguments tels que « un polynôme dont tous les coefficients sont nuls est nul », « un polynôme avec une infinité de racines est nul » et même « P^2 est continu et positif ».
   Les candidats qui signalent 4 racines oublient régulièrement de les mettre en évidence : on passe directement de « $\sum_{k=0}^{3} P^2(k) = 0$ » à « un polynôme de degré 3 (on a rarement inférieur ou égal à) ayant 4 racines est nul ».
   (b) Sur les 3 points qu'il fallait démontrer, il en manque très souvent un ou deux.
   Des confusions entre dim et card sont également notées.
   (c) Il s'agissait (presque) d'une question de cours. Elle a été peu traitée. Ceux qui ont répondu se sont souvent limités à l'expression de Q en fonction des polynômes L_p - souvent sans exprimer $\varphi(Q, L_p)$ - et donc n'ont pas répondu complètement à la question qui demandait des coordonnées.
   Les candidats ayant essayé un changement de base sont rarement arrivés au résultat.
3. Le procédé d'orthogonalisation ou d'orthonormalisation de Gram-Schmidt semble peu connu des candidats et est souvent émaillé d'erreurs de calcul, tout particulièrement chez ceux qui norment les vecteurs au fur et à mesure.
   On a souvent trouvé (L_0, L_1) qui ne sont pas dans $\mathbb{R}_1[X]$ ou $(-X, X-1)$ par une construction similaire aux L_p sans que les candidats se rendent compte qu'en procédant ainsi, ils changent de produit scalaire.
4. La situation a très souvent été comprise, même si parfois toutes les données ne figurent pas sur le schéma.
   Les correcteurs ont apprécié les illustrations aérées et en couleur.

5. Il y a eu beaucoup de $dp = y_p - ap - b$, mais aussi $d_p = [M_pN_p]$ ou $d_p = \begin{pmatrix} x_M - x_N \\ y_M - y_N \end{pmatrix}$.

6. (a) Des confusions entre l'unicité de Q et celle de son expression dans une base.
   Il est étonnant de voir que les candidats qui ont très certainement déterminé des sous-espaces propres de matrices à l'aide d'un système, écrivent ≪ un système de 4 équations à 4 inconnues ne possède qu'une seule solution ≫.

   (b) La question est peu traitée mais plutôt réussie. On note surtout des confusions entre $Q(X)$ et $Q(p)$.

   (c) C'est presque toujours confus. Le définition de la distance est mal connue : il y a bien un minimum mais pas toujours au bon endroit. Il est difficile de savoir de quel espace vectoriel il s'agit (souvent, on croit comprendre que c'est la droite d'équation $y = ax+b$!) et l'expression ≪ projeté orthogonal de ? ? ? sur ? ? ? ≫ est rare et encore plus rarement complète.

7. La plupart des candidats ont fait l'impasse sur cette question et la suivante pour aller directement à la question 9.

8. Les rares propositions parlent de la hessienne qui ne donne pourtant que des informations locales ou alors de paraboles ≪ sourire ≫... pour lesquelles on ne sait pas du tout quelle est la variable.

9. (a) Des candidats ont mal lu l'énoncé et ont tracé les points de coordonnées $(t, C(t))$.
   Il n'est pas toujours possible de savoir qui est $M(k)$ (et non M_k).
   Enfin, savoir choisir une unité adaptée à la situation fait partie des compétences que l'on peut attendre d'un futur ingénieur, tout comme indiquer les graduations et légendes des axes.
   A noter que des candidats sont étonnés de trouver une ≪ courbe ≫ croissante !

   (b) ≪ Les points devraient être alignés ≫ (et non allignés) n'est justifié qu'une fois sur deux.
   ≪ Ils ne sont pas alignés ≫ n'est presque jamais justifié.
   Quant à l'explication, les candidats mettent plus souvent en cause les lois de la physique plutôt que de parler par exemple des incertitudes sur les mesures (il y a pourtant un paragraphe entier sur ce thème dans le programme de Sciences Physiques de PTSI et celui de PT, sans compter qu'en pratique, les mesures sont des nombres décimaux) ou d'évoquer des conditions de mesures qui ne sont pas celles avec lesquelles la loi est obtenue.

10. (a) La question a été mal comprise, en particulier le ≪ en théorie ≫ et le plus souvent, les explications sont peu précises et aboutissent rarement à une explication concrète sur l'obtention de c et k.
   On trouve quelques candidats qui expliquent que s'ils avaient été en SPC, en SII (et même en SVT) - mais apparemment, en mathématiques, ce n'est pas possible -, ils auraient déterminé a et b puis auraient obtenu c et k en faisant $c = ...$ et $k = ...$

   (b) Faute d'avoir traité les questions 7 et 8, les candidats ne pouvaient répondre correctement à cette question.
   Ceci dit, il est louable que les candidats aient été nombreux à s'approprier les données expérimentales pour en déduire une droite ≪ proche ≫ de celle cherchée, ce qui leur a permis de traiter la question suivante.
   Il est simplement dommage, que les calculs effectués n'aient pas été expliqués.

(c) Le résultat n'est pas souvent arrondi à l'entier le plus proche.
Par ailleurs, si l'auteur du sujet n'a pas cherché à prendre des valeurs numériques qui correspondent à une situation réelle (pour que les calculs restent faisables à la main), il avait néanmoins veillé à ce que le résultat de cette question ne soit pas aberrant. Aussi tous les candidats qui trouvent des durées incluses entre 10 et 30 secondes ou même 15 minutes devraient réagir !

MATHEMATIQUES B

Présentation générale :
Le sujet de cette année se composait de trois exercices indépendants.

- Un premier exercice très court (deux questions) de géométrie dans l'espace. ;
- Un deuxième exercice de géométrie plane parcourait (presque) l'intégralité du programme sur les courbes paramétrées en s'intéressant à quelques courbes définies en polaires ;
- Un dernier exercice composé de 2 parties portait sur la résolution d'une équation matricielle dans deux situations différentes.

La géométrie représentait 60% du barème et l'algèbre 40%.

La longueur raisonnable du sujet a permis à une grande majorité des candidats d'aborder le totalité des questions.
Quelques questions plus difficiles, en particulier la deuxième partie de l'exercice d'algèbre ont permis aux candidats les plus à l'aise de se démarquer.
On constate que le nombre de copies très faibles est resté stable par rapport à l'an dernier.
Le sujet a donc permis de classer l'ensemble des candidats.

Présentation des copies :
Si la proportion des candidats obtenant la totalité des points de présentation est resté stable, on constate une nette diminution de la proportion des candidats n'ayant aucun point.
Les candidats sont donc encouragés à poursuivre dans cette voie.
Signalons quand même, que certains candidats utilisent des stylos de type feutre - bien que cela soit interdit - dont l'encre traverse le papier, ce qui donne un aspect très sale à la copie.

Par ailleurs, la mention ≪ les questions non correctement référencées ne seront pas notées ≫ figurant désormais dans l'en-tête, les candidats ont fait un effort sur la numérotation des questions.

Par l'opposé, on a constaté une nette diminution de la qualité de la graphie et de la langue française : orthographe, grammaire, conjugaison et même syntaxe comme l'absence de sujet et/ou de verbe.
Cela impose au correcteur un effort supplémentaire pour parvenir à comprendre ce que les candidats ont écrit, ce qui, même avec la meilleure volonté du monde, n'est pas toujours possible.

Il est rappelé aux candidats que dans un sujet de géométrie, ils ne doivent pas hésiter à illustrer leurs réponses par un schéma.
Les candidats qui le font à bon escient sont récompensés.

Rédaction :
La qualité de la rédaction est également en baisse.
En effet, cette année, on constate

- ◦ de nombreuses confusions entre $=$, $\Leftrightarrow$ et $\sim$ ou entre $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$, ainsi qu'entre ≪ si ... alors ... ≫ et ≪ si et seulement si ≫.
- ◦ un abus de l'usage de $\Leftrightarrow$ ou au contraire des copies sur lesquelles des phrases mathématiques sont écrites les unes sous les autres sans lien logique (donc, car, ... ou $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ...)

Il est rappelé que les équations doivent être résolues par équivalence.

○ des confusions très nombreuses entre x et $x(t)$: c'est x qui est (im)paire, continue, dérivable,.. et non $x(t)$.

○ L'utilisation impropre par les candidats du terme « gradient » en géométrie dès qu'ils calculent une dérivée.

○ de nombreuses affirmations sans justification.

○ de nombreux calculs dont on ne connait - et parfois, on ne comprend - ni les tenants ni les aboutissants

Quelques conseils de rédaction que les correcteurs aimeraient voir appliqués :

• Les notations de l'énoncé doivent être respectées.

Si les candidats ont besoin de notations qui ne figurent pas dans l'énoncé, ils doivent les définir et utiliser dans la mesure du possible des notations qui ne prêtent pas à confusion.

• De même, les consignes de l'énoncé doivent être respectées. Une réponse, même juste, qui ne respecte pas ces consignes ne peut pas être prise en compte. En particulier, la réponse aux questions qui débutent par « en déduire » doivent mentionner des résultats issus des questions précédentes ;

• Tous les résultats doivent être justifiés. On trouve bien trop souvent des affirmations sans preuve.

Par ailleurs, quand un résultat est fourni par l'énoncé, il est impératif que le détail des calculs figure sur la copie afin de convaincre le correcteur qu'on ne cherche pas à le tromper ; les mentions « calculs faits au brouillon » ne sont pas acceptées.

Ces tentatives de bluff indisposent les correcteurs et sont sanctionnées.

• Les correcteurs apprécient que le candidat annonce quel est son objectif et encore plus que le candidat, à l'issue de ses calculs, termine la question par une conclusion (qu'il $\boxed{\text{encadre}}$ à la règle) et non par un « CQFD ! » désinvolte.

• Les candidats doivent réfléchir à la nature des objets mathématiques qu'ils manipulent. Ainsi, cela leur évitera de dériver une courbe ou d'écrire des égalités entre des objets de différentes natures.

D'autres remarques concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Avant de passer à ce détail, on rappelle aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre et que, comme indiqué sur le sujet, la feuille de papier millimétré doit être rendue avec la copie (insérée au bon endroit et non reléguée à la fin de la copie, c'est encore mieux).

Premier exercice.

1. Un nombre important de candidats vérifient que $M(-1,\,1)$ a les bonnes coordonnées puis concluent que c'est le seul point possible !
   Pour les autres, la résolution est souvent maladroite et parfois, après avoir éliminé un cas, les candidats oublient de vérifier que l'autre convient.
2. Il semble que les candidats aient compris qu'il est rentable de traiter une telle question qui revient tous les ans.
   On a constaté peu de plans qui passent par O ou de plans tangents qui ne sont pas des plans, par contre, on constate de très nombreuses erreurs de calcul en général

dans le calcul du produit vectoriel (il y a pourtant moyen de vérifier son résultat) mais aussi dans la dérivée de $t \mapsto \sin(\pi\, t)$.

Deuxième exercice.

Partie A :

1. Deux remarques sur cette question (valables aussi pour la question suivante) :
   Dès que l'on précise le centre et le rayon, il y a unicité du cercle, par conséquent il convient de dire ≪ LE cercle de centre ... et de rayon ... ≫ et non ≪ UN cercle de centre ... et de rayon ... ≫
   Nombreux sont les candidats qui vérifient que $\forall t \in I_0$, $x_0^2(t) + y_0^2 = 1$... ce qui ne donne qu'une inclusion dans le cercle.
2. Les formules de duplication ne sont pas bien connues. De plus, il fallait faire attention à I_1, ce que peu de candidats ont fait.
   Enfin, de nombreux candidats ont reconnu un cercle de centre 0 et de rayon $\cos(t)$! (argument que l'on a trouvé aussi dans la question B.2. pour justifier que la courbe Λ_2 est de longueur finie)

Partie B :

1. Un peu plus d'un candidat sur deux connait la formule de la longueur...
   On compte quelques $\mathrm{e}^{-\ln(3)} = -3$... et un certains nombre de candidats est incapable de dériver $t \mapsto \cos(t)\mathrm{e}^t$!
2. La justification est souvent maladroite et contrairement à ce qu'affirment certains candidats, x_2 n'a pas de limite en $+\infty$.
3. De nombreuses confusions entre tangentes horizontales et verticales.
   Les candidats arrivent très souvent à $\cos(t) = \sin(t)$ (ce qui suffisait) puis à $t = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$ mais se sont ensuite perdus dans les calculs.
   Les $\Leftrightarrow$ n'étaient pas indispensables (et pas toujours justifiés).
4. On trouve très souvent les vecteurs $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ mais bien plus rarement le repère de Frenet.
   Le rayon de courbure a eu moins de succès, les candidats utilisant les formules de Frenet ont mieux réussi que ceux utilisant le théorème de relèvement.
5. Une nouveauté cette année : beaucoup de candidats ont préféré chercher l'enveloppe des normales plutôt que le lieu des centres de courbure.
   Compte-tenu des nombreuses erreurs de calculs, seul un candidat sur six parvient au résultat.
6. Les candidats ont préféré utiliser la matrice de la rotation plutôt que les nombres complexes.

Partie C :

1. Rares sont les candidats qui font attention à l'intervalle I_3 proposé, ce qui conduit certains d'entre eux à étudier la périodicité ou d'autres opérations comme $t \mapsto t \pm \pi$ et à plusieurs reprises I_3' est devenu un intervalle fermé.
   Faire un schéma positionnant $M(-t)$ par rapport à $M(t)$ limite les erreurs de symétries...

2. On constate de nombreuses erreurs dans la dérivée de y_3.
   Les tableaux sont corrects mais il y manque régulièrement les zéros des dérivées.
3. Cette question est une déception pour les correcteurs : les candidats se contentent d'un « c'est un point stationnaire » et passent à la suite.
   Ceux qui tentent de trouver la nature du point, utilisent majoritairement les dérivées successives de x_3 et y_3 et ne sont que rarement arrivés au bout.
   Les développements limités usuels en 0 de $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$ à l'ordre 3 permettant de trouver la réponse en très peu de temps.
   Les candidats oublient régulièrement les « $o(t^3)$ » dans les développements limités.
   On rappelle que la tangente (et non tangeante ou tengente ou ...) est une droite et non un vecteur ; de plus, on voit encore trop souvent : « la tangente est nulle »
4. Trop de candidats font les calculs... mais ne concluent pas.
   Par ailleurs, il était demandé un vecteur directeur de la tangente, pas une équation ou une représentation paramétrique.
5. Les candidats ont tendance à se précipiter sur le calcul de $\dfrac{y}{x}$ sans regarder d'abord les limites de x et y.
   On note des confusions entre asymptote, direction asymptotique, branche parabolique et même tangente (à l'infini) et on trouve $x = \dfrac{\pi}{2}$ comme équation de l'asymptote.
6. Le principal défaut des courbes tracées concerne les tangentes et l'asymptote : elles sont souvent peu visibles (2 cm de long) sur les tracés et les courbes ne sont pas toujours assez tangentes à leurs tangentes.

Partie D :

1. Les résultats étant donnés, beaucoup de candidats sont arrivés au résultat... en prenant soin d'écrire plusieurs lignes (parfois fausses !).
   Cette question a mis en lumière la difficulté que représente la compétence « factoriser » pour de nombreux candidats.
2. Des confusions entre l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   L'intersection des deux droites a souvent donné... des objets bizarres (pas toujours identifiables) et non un point.
   Il est inquiétant de constater que la très grande majorité des candidats n'est pas capable d'obtenir un point et un vecteur directeur d'une droite dont on connait une équation cartésienne.
   En ce qui concerne la représentation paramétrique, il ne doit y avoir qu'un seul paramètre (appartenant à $\mathbb{R}$ et non I_4) qui ne doit pas s'appeler t.
   Dans certaines copies, il est impossible de faire la différence entre h et k.
3. Peu traitée compte-tenu de la question précédente et avec souvent de nombreuses erreurs (souvent dues au fait que les candidats ont remplacé trop tôt $h(t)$ et $k(t)$ par leur expression).
4. Cette question n'a pas posé de problème aux rares candidats ayant trouvé la bonne réponse à la question précédente.

Troisième exercice.

Partie A :

1. 85% des candidats résolvent correctement les trois équations... et un peu plus de 2% n'en ont résolu aucune avec succès.

2. (a) La grande majorité des candidats a réussi à déterminer le polynôme caractéristique.
   Il est souhaitable que les candidats indiquent les opérations effectuées si possible avec le bon codage. Cette remarque est valable aussi pour les systèmes de la question 2.(c).
   Entre deux déterminants, c'est le signe « = » que l'on doit trouver et non « $\Leftrightarrow$ » ou $\sim$. On note également quelques problèmes (absences) de parenthèses.
   Un simple calcul de trace aurait permis aux candidats s'étant trompés de constater leur erreur.
   Et comme les années précédentes, on trouve encore « les valeurs propres sont $\{-1, 0, 3\}$ »... mais un peu moins souvent.

   (b) Souvent imprécis : « trois valeurs propres », « condition suffisante de diagonalisation » (non précisée) ou avec des mauvais sujets : « A est scindée » ou dans un contexte non valable ici : « théorème spectral »... et toujours de nombreux « le polynôme caractéristique est scindé donc A est diagonalisable »
   A la lecture des copies, les correcteurs se demandent régulièrement si les candidats connaissent la définition d'un « polynôme scindé ».
   On rappelle qu'une matrice n'a pas de dimension et que le rang a une signification bien précise et qu'il ne désigne pas le nombre de lignes ou de colonnes de la matrice surtout que dans cette partie le rang de A était égal à 2.
   Trop de candidats se précipitent sur la détermination des sous-espaces propres, ce qui était inutile dans cette question.

   (c) Les sous-espaces propres sont parfois non justifiés et souvent mal justifiés : on ne sait pas le lien entre le sous-espace propre cherché et le système, absence de $\Leftrightarrow$ entre les systèmes, ou présence d'un $\Leftrightarrow$ entre un système et un espace vectoriel pour les candidats qui optent pour la méthode système ; rang de la matrice ou dimension du sous-espace propre non justifié pour ceux qui choisissent les combinaisons linéaires sur les colonnes.
   Il est regrettable de constater qu'un nombre non négligeable de candidats n'ont aucune réaction lorsqu'ils trouvent un sous-espace propre égal à $\{0\}$ et écrivent P^{-1} avec une matrice P ayant une colonne de zéros ou deux colonnes identiques.
   A de rares exceptions près, les candidats ont respectées les consignes concernant D.
   Il n'est pas utile de normer les vecteurs propres choisis pour construire P... et P n'était pas (ne pouvait pas être) orthogonale.
   Sauf si le sujet le demande, il n'est pas utile de calculer P^{-1}.

3. (a) Les candidats ayant procédé par double implication ont écrit - sans s'en rendre compte - deux fois la même chose.
   Les candidats qui ne montrent qu'une implication (avec des « car », des « donc » ou des « $\Rightarrow$ ») ou qui n'écrivent pas le moindre lien entre les lignes et qui concluent par une équivalence sont relativement nombreux et n'ont obtenu aucun point sur cette question.
   Il n'est pas utile de faire une récurrence pour établir que $M^2 = P\Delta^2P^{-1}$.

   (b) Les problèmes les plus fréquemment rencontrés sont : des équivalences lors de la multiplication par M (a priori non inversible) et des candidats qui affirment que D et Δ commutent car D est diagonale.

(c) La première partie de la question est souvent bien traitée - si on ignore l'équivalent lors de la multiplication par X.
Des confusions sont notées entre ≪ appartenir à un sous-espace propre ≫ et ≪ être un vecteur propre ≫... surtout que dans ce sujet, Y pouvait être nul.
Trop de candidats écrivent ≪ LE vecteur propre ≫.
La seconde partie de la question est très peu abordée.

(d) Des explications confuses : A et M ont les mêmes sous-espaces propres (ou les mêmes vecteurs propres), ce qui est faux à priori, ou qui commencent par : M a trois valeurs propres distinctes ou M est diagonalisable...

4. (a) Question bien traitée quand elle l'a été... on regrette juste que certains candidats n'aient pas trouvé le courage d'écrire les 4 matrices.

(b) Ceux qui ont traité la question précédente ont généralement fait également celle-ci.
La consigne concernant l'expression des matrices M n'a pas toujours été respectée.

Partie B :

1. Cette question qui ressemblait à la question 3.(a) de la partie précédente a été plutôt réussie.
2. La question A.3.(c) a inspiré les candidats et le taux de réussite est un peu inférieur à la précédente.
Outre de nombreux équivalents inutiles et faux, les candidats oublient de rappeler qu'un vecteur propre est non nul.
On constate également quelques produits qui n'existent pas.
3. (a) La grande majorité des candidats ont transformé le ≪ si ... alors ≫ de la question précédente en ≪ si et seulement si ≫.
Ceux qui ne l'ont pas fait, semblent ignorer qu'il existe des matrices non diagonalisables.

(b) Mêmes remarques qu'à la question précédente.
Rares sont les candidats qui ont envisagé le cas où λ_1 est valeur propre double.
S'intéresser au signe de Δ (le discriminant et non le déterminant) n'avait pas de sens puisque α était un nombre complexe.

(c) Il y a ceux qui ont vérifié que les matrices diagonales données à la question précédente était solution de l'équation et qui ont conclu grâce à la question 1. et ceux (souvent confus) qui ont redémontré la question 1 sans vérifier que les matrices diagonales étaient des solutions.

(d) Il y a eu quelques matrices diagonales (dont la matrice nulle), un certain nombre de matrices M (trouvées au hasard ?) qui ont souvent obligé les correcteurs à calculer M^2, des matrices proposées après une longue résolution de système (fausse puisqu'il aurait dû y avoir une infinité de solutions et non une seule), ...
La question précédente a été peu exploitée.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *correcteur* désignera une correctrice ou un correcteur.

Remarques générales

Le sujet de cette année concernait les propriétés de fonctions trigonométriques permettent d'exprimer des sommes de séries classiques – comme $\mathcal{C} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)^2}$, où $\mathcal{C}$ est la constante de Catalan – ou encore, la très classique intégrale de Gauss, dont la valeur peut être déterminée à l'aide d'intégrales à paramètres.

Cette épreuve a été globalement bien réussie. L'intégralité du sujet a été traitée dans de très bonnes copies, qui ont donc obtenu la note maximale de vingt sur vingt. A côté, il reste, comme chaque année, de très faibles copies, où les candidats ne semblent pas faire la différence entre une fonction polynomiale et une fonction trigonométrique.

Comme l'an passé, nous alertons sur l'écriture difficilement déchiffrable d'un grand nombre de copies. L'orthographe laisse toujours à désirer, en particulier, quand il s'agit de termes mathématiques, sans compter avec les sempiternelles abréviations : ≪ cv ≫, par exemple, ou la terminologie transformée : si on dit qu'une intégrale est impropre, on ne parle pas ≪ d'impropreté ≫. D'autre part, certains candidats utilisent un vocabulaire inadapté au contexte d'un concours. Par exemple, écrire des mots comme ≪ débile ≫, ≪ houlà ≫, sur une copie de concours n'est pas une bonne idée.

Nous rappelons que les traits se tirent **à la règle**, et que les résultats doivent être **encadrés**.

Remarques particulières

Préambule

1. La majorité des candidats (au moins 90%) ont su redonner les deux expressions (l'une faisant intervenir la fonction *cosinus*, l'autre la fonction *tangente*) de la dérivée de la fonction tangente.

2. (a) Dans cette question, la majorité des candidats ont calculé les limites à gauche et à droite en $\dfrac{\pi}{2}$ de la fonction g. Quelques uns ont remarqué qu'en considérant directement la fonction $\tilde{g}$ telle que, pour tout réel x de $]0,\pi[$, $\tilde{g}(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, on obtenait directement le prolongement continu de $]0,\pi[$, et que $\tilde{g}$ était dérivable sur $]0,\pi[$.

   Pour le reste, l'étude de la dérivabilité de $\tilde{g}$ a posé de gros problèmes, et a même découragé une large partie des candidats.

   (b) La majorité des candidats ont obtenu $-\tilde{g}$ comme primitive sur $]0,\pi[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$. Beaucoup trop de candidats n'ont pas fait attention au signe, et ont donné $\tilde{g}$.

3. (a) Très peu de candidats ont donné les domaines de définition respectifs $\mathcal{D}_{f_1} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{f_2} \subset \mathbb{R}$ des fonctions f_1 et f_2. Cette question a suscité beaucoup de réponses soit très incomplètes : « $\mathcal{D}_{f_1} =]-\pi,\pi[$ », « $\mathcal{D}_{f_2} =]0,\pi[$ », « $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \,, \tan\left(\dfrac{x}{2}\right) < 0 \right\}$ », soit fantaisistes et complètement erronées : « $\mathcal{D}_{f_1} = \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ » (extrapolation de la question 4 ?), « $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$ », « $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}^\star$ », etc ... Un nombre important de candidats ne sait pas écrire correctement une réunion d'intervalles, ou ajoute des réels à des intervalles : « $]-\pi,\pi[+2\,k\,\pi$ », par exemple, quand ce ne sont pas des « intervalles modulo quelque chose, $]-\pi,\pi[\,[2\,\pi]$ ». Les quantificateurs ne sont pas connus, le signe « = » n'est pas toujours présent ; avons trouvé, à maintes reprises : « $\mathcal{D}_{f_2} \cap]2\,k\,\pi, \pi + 2\,k\,\pi[$ » (ou autres variantes).

(b) Tous les candidats n'ont pas réussi à montrer que les fonctions f_1 et f_2 étaient$2\,\pi$-périodiques. Il est aussi surprenant de lire fréquemment que les périodes de f_1 et f_2 sont différentes.

Certains candidats ont cherché à étudier la parité de la fonction pour répondre à la question.

(c) Très peu de candidats ont donné les domaines de dérivabilité respectifs des fonctions f_1 et f_2. Les réponses ne sont pas souvent justifiées, les arguments revenant fréquemment sont : ≪ par opérations ≫, ce qui, dans ce contexte, est insuffisant. Il fallait, au minimum, rappeler que la fonction tangente est dérivable sur son domaine de définition, et la fonction logarithme népérien sur le sien.

D'autres candidats calculent f_1' et f_2', puis ≪ déduisent ≫ des domaines de définition de f_1' et f_2' les domaines de dérivabilité respectifs des fonctions f_1 et f_2 ...

(d) La plupart des candidats ont donné l'expression correcte de $f_1'(x)$. Certains ne maîtrisent visiblement pas la dérivation composée, et ont omis le facteur $\frac{1}{2}$.

(e) Dans cette question également, la plupart des candidats ont donné l'expression correcte de $f_2'(x)$. Certains ne connaissent pas les formules d'addition trigonométriques, et n'ont donc pas obtenu l'expression simplifiée de $f_2'(x)$ comme demandé.

(f) Dans cette question, on demandait d'étudier les variations des fonctions f_1 et f_2, et de donner leurs tableaux de variations respectifs sur une période, en précisant les limites aux bords. Un nombre important de candidats ont donné, pour la fonction f_1, son tableau de variation sur $[0,\pi[$ (sans aucune mention de l'imparité de la fonction). En ce qui concerne la fonction f_2, de nombreuses copies la donnent définie sur $]-\pi,\pi[$, puis $]\pi, 2\,\pi[$.

Nous avons aussi trouvé des copies donnant les tableaux de variation respectifs de f_1 et f_2 sur $]3\,\pi, 5\,\pi[$ et $]4\,\pi, 5\,\pi[$ – ce qui n'est pas faux – mais peu naturel en tout cas. Il nous semble important de rappeler que les réponses attendues sont les réponses naturelles – les plus simples.

Il était demandé également de donner les valeurs des fonctions f_1 et f_2 en $\frac{\pi}{2}\,[2\,\pi]$, ce qui n'a pas toujours été fait.

(g) Dans cette question, il était demandé de tracer, sur un même graphe, et non deux, la courbe représentative de f_1 sur $\mathcal{D}_{f_1} \cap [-2\,\pi, 2\,\pi]$ et la courbe représentative de f_2 sur $\mathcal{D}_{f_2} \cap [-2\,\pi, 2\,\pi]$. Si de nombreux tracés de la courbe représentative de f_1 sont corrects, c'est beaucoup moins le cas pour la courbe représentative de f_2 (branches paraboliques qui correspondent à des valeurs en dehors du domaine de défintion, par exemple, quand la courbe ne s'arrête pas brusquement pour la valeur $y = 1$ ...)

4. (a) Tous les candidats n'ont pas explicité correctement le domaine de définition de la fonction f_3. Comme cela était le cas dans la question 3. a, beaucoup répondent que c'est « $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ».

(b) Tous les candidats n'ont pas non plus su étudier les variations de la fonction f_3 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, qui, dans de nombreuses copies, a été donnée comme « décroissante » sur cet intervalle, en contradiction complète avec des bornes en ordre croissant.

Certains candidats ont visiblement oublié l'intérêt que peut représenter le signe de la dérivée. Celle-ci n'est donc pas toujours donnée, ce qui conduit à des tableaux de variations obtenus on ne sait trop comment. Nous rappelons aussi que, pour obtenir un tableau de variations, il faut étudier le signe de la dérivée, et non simplement les valeurs d'annulation de celle-ci.

Certains candidats ont étudié « à la main » la croissance de la fonction f_3, ce qui est quand même conséquemment plus long que d'étudier le signe de sa dérivée.

Partie I

1. Un nombre significatif de candidats ne comprend pas que les différentes questions de cette question s'enchaînent. Il est suprenant de voir une bonne réponse à la question 1. a. et une mauvaise réponse en 1. b, ou inversement. Les candidats doivent analyser la structure du sujet, et y chercher des indications de stratégie.

(a) La majorité des candidats ont su donner une primitive sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction logarithme népérien. Certains, dans une proportion hélas non négligeable, ont confondu dérivée et primitive, et ont donné la fonction inverse $t \mapsto \dfrac{1}{t}$. D'autres ont donné la fonction *arctangente*.

(b) La majorité des candidats ont su exprimer, en fonction du réel $\varepsilon > 0$, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} \ln t\, dt$. Nous notons pas mal d'erreurs d'étourderie à cette question, de nombreux candidats n'ont pas fait attention aux signes, et donnent comme réponse $-1 - \varepsilon - \varepsilon \ln \varepsilon$.

(c) Tous les candidats n'ont pas pensé à utiliser la question précédente pour étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln t\, dt$. Certains l'ont redémontrée en utilisant le fait que, lorsque $t \to 0^+$, $\sqrt{t}\, \ln t = o(1)$.

De nombreux candidats se contentent d'écrire que « c'est un résultat du cours », sans aucune justification afférente, et n'ont donc pas obtenu les points à cette question.

Il est parfois proposé deux réponses différentes à cette question, l'une qui suit le sujet et l'autre qui met en place un argument de comparaison indépendant du début de la question, souvent incorrect (à ce propos, nous rappelons que le critère de convergence des intégrales de Riemann en 0 n'est pas le même qu'en $+\infty$). Ce n'est pas au correcteur de faire le choix entre les deux approches : un argument correct et un argument faux ne rapportent aucun point.

2. L'étude de la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx$, question plus difficile, n'a été correctement traitée que par peu de candidats. Beaucoup veulent composer des équivalents ! Par ailleurs, une majoration de la fonction à intégrer ne prouve rien dans le cas des fonctions à valeurs négatives. L'une ou l'autre de ces deux erreurs est très fréquente.

   Un nombre important de candidats se lancent dans un changement de variable, et tous les calculs qui suivent. Or, s'il était effectivement possible d'utiliser le résultat du programme (changement de variable sur la nature des intégrales), très peu l'ont fait correctement.

   Le candidats sont amenés à réfléchir sur la juste distance à avoir vis-à-vis du cours : il est indispensable d'en connaître les énoncés et les méthodes, mais il peut être problématique de vouloir en faire un usage excessivement dogmatique, certaines situations demandent de s'inspirer du cours, sans chercher à y plaquer un énoncé tout fait.

3. La majorité des candidats ont redonné le développement en série entière de la fonction arctangente. Le rayon de convergence n'est pas toujours correct, de nombreuses copies donnant « $+\infty$ »... D'autre part, nous notons de nombreuses confusions entre *rayon de convergence* et *domaine de convergence*. Certains candidats

répondent que « le rayon de convergence est l'intervalle de convergence « $]-1,1[$ » – ou « $[-1,1]$ » dans d'autres cas ...

4. Les outils du cours nécessaires pour aborder cette question sont très mal connus. L'échange de $\sum$ et $\displaystyle\int$ de cette question n'a pas souvent été bien traité. Beaucoup de candidats disent qu'ils appliquent le théorème d'inversion limite et intégrale, sans plus de précisions. Ceux qui ont voulu appliquer le théorème d'intégration terme à terme du nouveau programme (item *d.*, page 16), ne connaissent pas toujours correctement les hypothèses. Ainsi, c'est la série $\displaystyle\sum \int_I |f_n|$ qui doit converger, la convergence de $\displaystyle\sum \int_I f_n$ ne suffit pas. Ce n'est pas non plus $\displaystyle\sum \left|\int_I f_n\right|$. Nous avons trouvé aussi beaucoup de réponses fantaisistes, les candidats justifiant l'échange de $\sum$ et $\displaystyle\int$ par « intégration par parties », « croissance de l'intégrale », linéarité ...

   Certains candidats justifient correctement l'échange, mais, par contre, ne font pas le calcul ...

5. (a) Beaucoup de candidats ont correctement effecué le changement de variable $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = u$, et obtenu la relation attendue.

   Certains font le changement de variable, mais de façon extrêmement compliquée et lourde (avec des cosinus d'arctangentes, des divisions, multiplications ...). D'autres écrivent les bonnes intégrales, mais on ne peut pas suivre le calcul, puisqu'il n'y a pas d'égalités !

   (b) Très peu de candidats ont su justifer que $\dfrac{8}{9}$ était une valeur approchée de la constante de Catalan $\mathcal{C}$. Beaucoup se sont contentés de dire que l'on faisait le calcul des deux premiers termes de la somme. Peu ont pensé à utiliser le théorème de convergence des séries alternées. Certains l'ont fait, mais sans aucune mention au théorème ...

   (c) Très peu de candidats ont donné d'un entier naturel non nul N à partir de laquelle S_N est une valeur approchée de $\mathcal{C}$ à 10^{-2p} près. Certaines copies connaissaient visiblement le théorème de convergence des séries alternées, qui est là encore utilisé sans même être cité ...

Partie II

1. La majorité des candidats ont montré que, pour tout réel x de $]0,\pi[$:

$$f_4''(x) = -f_4(x) + \frac{\cos x}{\sin x}$$

Certains candidats se sont lancés dans des calculs extrêmement compliqués (parfois plusieurs pages), où, avec la meilleure volonté du monde, le calcul n'est pas vérifiable. Il faut penser que les calculs sont destinés à être lus et vérifiés, et qu'un calcul inutilement compliqué n'obtiendra pas les points. D'autre part, un certain nombre de candidats obtiennent *magiquement* le résultat ... Nous rappelons que l'honnêteté intellectuelle est essentielle dans une copie. Il fallait en particulier écrire simplement la dérivée première (ce qui n'a pas toujours été le cas). Même si cela ne changeait rien au résultat final, certains candidats ont remplacé $\dfrac{\sin x}{\sin x}$ par 0.

2. La majorité des candidats ont su résoudre l'équation homogène. Attention, dire que les solutions sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda\, e^{i\,t} + \mu\, e^{-i\,t}$$

sans préciser la nature des constantes (dans ce cas, des constantes complexes), ne répond pas à la question. Les candidats ayant écrit que les constantes étaient réelles n'ont évidemment pas eu les points.

Un nombre non négligeable de candidats ont toutefois donné des réponses fantaisistes : $\ll\ t \mapsto \lambda\, e^t + \mu\, t \gg$, $\ll t \mapsto \lambda\, \cos t \gg$, $\ll t \mapsto \cos t + \sin t\ \gg$, $\ll x \mapsto A\, \cos t + B\, \sin t \gg$ etc ...

Cette équation différentielle est très classique et utilisée dans d'autres matières – *l'oscillateur harmonique*, d'ailleurs cité par quelques candidats – il est étonnant qu'il n'y ait pas davantage de candidats qui connaissent le résultat.

3. Peu de candidats ont montré que les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0,\pi[$ étaient de la forme $y = y_0 + f_4$, où y_0 est une solution de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$. Certains se contentent d'écrire $\ll$ qu'on remplace dans $(\mathcal{E})$ $\gg$, pour obtenir ensuite $\ll \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} \gg$ et conclure ensuite au résultat ...

Beaucoup de candidats vérifient que les fonctions de la forme $\ll$ solution particulière + une solution de l'équation homogène $\gg$ sont effectivement des solutions de l'équation différentielle, mais ne commentent pas sur le fait que ce sont LES solutions de l'équation (la rigueur logique fait d'ailleurs globalement défaut dans l'ensemble des copies). L'écriture seule $y = y_0 + f_4$ – sans autre forme de commentaire – n'est pas auto-interprétable. Les candidats gagneraient en efficacité s'ils connaissaient la structure de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire. Il est par exemple a priori absurde de ne pas fabriquer à la question 2 un espace vectoriel de dimension 2 de solutions. A noter que certains candidats confondent le nombre de solutions et la dimension de l'espace des solutions.

Pour obtenir les points dans cette question, il fallait au minimum citer (correctement) le cours : principe de superposition, théorème de structure, ou bien, un raisonnement qui fait apparaître une équivalence : « les $y = y_0 + f_4$ sont bien solutions », d'une part, et « si y est solution alors $y - f_4$ est solution de l'équation homogène », d'autre part.

(a) La plupart des candidats ont su montrer que, si y est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0, \pi[$, alors z' est solution sur $]0, \pi[$ d'une équation différentielle du premier ordre. Nous avons noté un certain nombre d'erreurs d'étourderie sur les réponses finales, beaucoup de candidats obtenant correctement, pour tout réel x de $]0, \pi[$,

$$z''(x)\,\sin x + 2\,z'(x)\,\cos x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad (\mathcal{E}')$$

mais donnant ensuite $z''(x)\,\sin x + z'(x)\,\cos x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ (oubli du facteur 2), ou $z''(x) + z'(x)\,\dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, ce qui fausse la suite de leurs résultats.

(b) Une grande partie des candidats ont su déterminer les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}')$. Nous avons relevé beaucoup d'erreurs d'étourderie : omission du signe *moins*, ce qui conduisait à des expressions en $\sin^2 x$, et non son inverse. D'autre part, de nombreux candidats ne simplifient pas les expressions obtenues, et continuent tous leurs calculs avec des expressions en $e^{-2\,\ln(\sin x)}$.

Un peu moins de la moitié des candidats ont correctement appliqué la méthode de variation de la constante pour déterminer les solutions de $(\mathcal{E}')$.

(c) Cette question n'a pas toujours été bien traitée. Alors que cela était bien indiqué dans le sujet, il fallait utiliser le Préambule pour obtenir les primitives des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$.

La méthode de résolution de l'équation différentielle de la question 4 . est globalement connue de manière trop approximative, et les solutions trouvées en $4\,.b$. ne permettent souvent pas d'aborder cette question et la suivante.

La constante d'intégration est trop souvent omise (ce qui ne permet pas d'ailleurs de répondre correctement à la question suivante).

(d) Cette question n'a été que peu traitée, beaucoup de candidats n'allant pas au bout de leur raisonnement et n'exploitant pas leurs résultats – pourtant corrects

– à la question précédente.

Partie III

1. Très peu de candidats ont correctement donné $\mathcal{D}_G = \mathbb{R}$. Beaucoup confondent l'existence de l'intégrande $e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}$, et sa continuité.

2. Très peu de candidats ont correctement étudié la continuité de la fonction G. Beaucoup ne semblent pas avoir compris que la majoration indépendante de x – la fameuse *hypothèse de domination* par une fonction φ, à valeurs positives, ne dépendant pas de x, intégrable sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ requise par le théorème de continuité des intégrales à paramètres est la seule façon d'obtenir la continuité par rapport à la variable x en un point x_0 – ce qui ne s'obtient pas avec une dépendance de φ par rapport à la variable x. Ainsi, les réponses faisant intervenir e^{-x^2} – quand ce n'est pas e^{-x} ne marchent pas.

   Certains candidats ont trouvé la majoration de l'intégrande par 1, mais ne parvenaient pas à conclure car le nombre 1 ne leur semblait pas être une fonction dépendant de θ.

3. Pour obtenir $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$, un nombre important de candidats ont voulu passer à la limite dans l'intégrale, au lieu d'utiliser la majoration naturelle de l'intégrande $e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}$ par e^{-x^2}.

4. Très peu de candidats ont correctement étudié la dérivabilité de la fonction G. L'énoncé du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres n'est malheureusement pas toujours connu. Comme lors de l'étude de la continuité, l'hypothèse de domination de la valeur absolue de la dérivée par rapport à la variable x de l'intégrande par une fonction ϕ, ne dépendant pas de x, à valeurs positives, intégrable sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, fait souvent défaut. Les énoncés sont parfois incomplets, les candidats évoquant « la domination », mais sans plus de précisions (aucune mention de l'intégrabilité de la fonction dominante). D'autre part, de nombreuses erreurs ont été faites en termes de domination : absence de la valeur absolue, majoration par une quantité négative ; majoration de $e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}$ par $e^{-\frac{a^2}{\cos^2\theta}}$, ou par e^{-a^2}, quand ce n'est pas par $e^{-\frac{1}{\cos^2\theta}}$.

5. (a) Très peu de candidats ont réussi à justifier que $\mathcal{D}_H = \mathbb{R}$, puisque la fonc-

tion $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Cette question a donné lieu à quantité de réponses hors de propos, utilisant la dérivabilité ou la continuité d'intégrales à paramètres. D'autres candidats ont invoqué la convergence de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Nous rappelons que la construction à la base du programme d'intégration consiste à intégrer des fonctions continues sur un segment.

(b) Dans la lignée des réponses à la question précédente, peu de candidats ont montré que la fonction H était de classe C^1 sur $\mathcal{D}_H = \mathbb{R}$. Par contre, beaucoup de candidats ont correctement explicité la dérivée de H, en citant, comme il le fallait, le théorème fondamental de l'analyse. Ce manque de réflexion et de suite logique est dommage.

Beaucoup ont donné des réponses fantaisistes : « $H'(t) = e^{-t^2} - 1$ », par exemple.

6. Peu de candidats ont obtenu la bonne expression de la dérivée de la fonction G. Certains, ayant donné à la question 4 . des expressions fausses obtiennent, de façon *magique*, le résultat correct, sans se poser la question de la cohérence avec ce qu'ils ont écrit juste avant ...

7. Un certain nombre de candidats ont montré que la fonction $H^2 + G$ était constante. Mais tous ne vont pas au bout de la question, et ne précisent pas la valeur de cette constante.

   Nous rappelons aussi que si la dérivée d'une fonction s'annule sur l'intervalle où cette fonction est définie, alors la fonction est constante. Les ensembles de définitions de G et H conduisent souvent à des incohérences à cet endroit.

8. Les candidats ayant correctement répondu à la question précédente ont bien retrouvé la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Par contre, l'expression de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\,t^2}\,dt$, pour tout réel $x > 0$, a donné lieu à des réponses complètement fausses, comme « $\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^x$ », ou autres variantes, trouvés à maintes reprises dans les copies.

Partie IV

1. Tous les candidats ne connaissent pas le développement en série entière de la fonction sinus. Certains donnent la bonne expression, mais le rayon de convergence est faux : « 1 », parfois « 0 », ce qui montre une profonde méconnaissance de la notion de *rayon de convergence*. Nous avons aussi trouvé dans les copies un nombre non négligeable de développements faux : sans les $(-1)^n$, ou alors, sans les factorielles, ou encore, uniquement avec des puissances paires.

2. Si une grande majorité de candidats ont donné, pour tout réel x non nul,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n}}{(2\,n+1)\,!}$$

peu ont vérifié que la somme $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n}}{(2\,n+1)\,!}$ évaluée en 0 valait $1 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

En outre, beaucoup de candidats ont affirmé qu'une fonction continue était développable en série entière.

3. Peu de candidats ont correctement traité cette question. Un nombre non négligeable de candidats donnent la bonne réponse, $\alpha_N = -\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2\,\pi^2}$, mais sans justification. Certains l'ont fait très proprement, par récurrence.

Nous avons relevé des erreurs d'étourderie – inattention, avec des sommes qui commencent à $k = 0$.

Le reste de cette partie est souvent bâclé, probablement par manque de temps. Nous insistons sur le fait que l'objectif de cette partie est de démontrer en particulier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Connaître le résultat et l'affirmer sans refaire la démarche ne rapporte rien (mais permet parfois de récupérer un point ou deux à la question 5.)

---

4. Un certain nombre de candidats ont retrouvé le résultat classique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Toutefois, un nombre non négligeable de candidats ont fait une erreur de signe et n'ont pas été surpris par la non cohérence du résultat ($-\dfrac{1}{6}$ au lieu de $\dfrac{1}{6}$).

5. Un bon quart des candidats ont su calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ à l'aide du résultat de la question précédente.

   Certains ne maîtrisent pas ces notions de sommes, et, sur la base « d'équivalences » entre $\dfrac{1}{2\,n+1}$ et $\dfrac{1}{2\,n}$, ont écrit des égalités entre $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)^2}$ et $\displaystyle\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

6. Un tout petit nombre d'excellentes copies a traité avec succès cette question. Bravo !

7. Comme dans le cas de la question précédente, un tout petit nombre d'excellentes copies a aussi traité avec succès cette question.