MATHEMATIQUES B

Présentation générale :
Le sujet de cette année se composait de trois exercices indépendants.

- Un premier exercice très court (deux questions) de géométrie dans l'espace. ;
- Un deuxième exercice de géométrie plane parcourait (presque) l'intégralité du programme sur les courbes paramétrées en s'intéressant à quelques courbes définies en polaires ;
- Un dernier exercice composé de 2 parties portait sur la résolution d'une équation matricielle dans deux situations différentes.

La géométrie représentait 60% du barème et l'algèbre 40%.

La longueur raisonnable du sujet a permis à une grande majorité des candidats d'aborder le totalité des questions.
Quelques questions plus difficiles, en particulier la deuxième partie de l'exercice d'algèbre ont permis aux candidats les plus à l'aise de se démarquer.
On constate que le nombre de copies très faibles est resté stable par rapport à l'an dernier.
Le sujet a donc permis de classer l'ensemble des candidats.

Présentation des copies :
Si la proportion des candidats obtenant la totalité des points de présentation est resté stable, on constate une nette diminution de la proportion des candidats n'ayant aucun point.
Les candidats sont donc encouragés à poursuivre dans cette voie.
Signalons quand même, que certains candidats utilisent des stylos de type feutre - bien que cela soit interdit - dont l'encre traverse le papier, ce qui donne un aspect très sale à la copie.

Par ailleurs, la mention ≪ les questions non correctement référencées ne seront pas notées ≫ figurant désormais dans l'en-tête, les candidats ont fait un effort sur la numérotation des questions.

Par l'opposé, on a constaté une nette diminution de la qualité de la graphie et de la langue française : orthographe, grammaire, conjugaison et même syntaxe comme l'absence de sujet et/ou de verbe.
Cela impose au correcteur un effort supplémentaire pour parvenir à comprendre ce que les candidats ont écrit, ce qui, même avec la meilleure volonté du monde, n'est pas toujours possible.

Il est rappelé aux candidats que dans un sujet de géométrie, ils ne doivent pas hésiter à illustrer leurs réponses par un schéma.
Les candidats qui le font à bon escient sont récompensés.

Rédaction :
La qualité de la rédaction est également en baisse.
En effet, cette année, on constate

- de nombreuses confusions entre $=$, $\Leftrightarrow$ et $\sim$ ou entre $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$, ainsi qu'entre ≪ si ... alors ... ≫ et ≪ si et seulement si ≫.
- un abus de l'usage de $\Leftrightarrow$ ou au contraire des copies sur lesquelles des phrases mathématiques sont écrites les unes sous les autres sans lien logique (donc, car, ... ou $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ...)

Il est rappelé que les équations doivent être résolues par équivalence.

∘ des confusions très nombreuses entre x et $x(t)$: c'est x qui est (im)paire, continue, dérivable,.. et non $x(t)$.

∘ L'utilisation impropre par les candidats du terme « gradient » en géométrie dès qu'ils calculent une dérivée.

∘ de nombreuses affirmations sans justification.

∘ de nombreux calculs dont on ne connait - et parfois, on ne comprend - ni les tenants ni les aboutissants

Quelques conseils de rédaction que les correcteurs aimeraient voir appliqués :

• Les notations de l'énoncé doivent être respectées.

Si les candidats ont besoin de notations qui ne figurent pas dans l'énoncé, ils doivent les définir et utiliser dans la mesure du possible des notations qui ne prêtent pas à confusion.

• De même, les consignes de l'énoncé doivent être respectées. Une réponse, même juste, qui ne respecte pas ces consignes ne peut pas être prise en compte. En particulier, la réponse aux questions qui débutent par « en déduire » doivent mentionner des résultats issus des questions précédentes ;

• Tous les résultats doivent être justifiés. On trouve bien trop souvent des affirmations sans preuve.

Par ailleurs, quand un résultat est fourni par l'énoncé, il est impératif que le détail des calculs figure sur la copie afin de convaincre le correcteur qu'on ne cherche pas à le tromper ; les mentions « calculs faits au brouillon » ne sont pas acceptées.

Ces tentatives de bluff indisposent les correcteurs et sont sanctionnées.

• Les correcteurs apprécient que le candidat annonce quel est son objectif et encore plus que le candidat, à l'issue de ses calculs, termine la question par une conclusion (qu'il $\boxed{\text{encadre}}$ à la règle) et non par un « CQFD ! » désinvolte.

• Les candidats doivent réfléchir à la nature des objets mathématiques qu'ils manipulent. Ainsi, cela leur évitera de dériver une courbe ou d'écrire des égalités entre des objets de différentes natures.

D'autres remarques concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Avant de passer à ce détail, on rappelle aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre et que, comme indiqué sur le sujet, la feuille de papier millimétré doit être rendue avec la copie (insérée au bon endroit et non reléguée à la fin de la copie, c'est encore mieux).

Premier exercice.

1. Un nombre important de candidats vérifient que $M(-1,\, 1)$ a les bonnes coordonnées puis concluent que c'est le seul point possible !
   Pour les autres, la résolution est souvent maladroite et parfois, après avoir éliminé un cas, les candidats oublient de vérifier que l'autre convient.
2. Il semble que les candidats aient compris qu'il est rentable de traiter une telle question qui revient tous les ans.
   On a constaté peu de plans qui passent par O ou de plans tangents qui ne sont pas des plans, par contre, on constate de très nombreuses erreurs de calcul en général

dans le calcul du produit vectoriel (il y a pourtant moyen de vérifier son résultat) mais aussi dans la dérivée de $t \mapsto \sin(\pi\, t)$.

Deuxième exercice.

Partie A :

1. Deux remarques sur cette question (valables aussi pour la question suivante) :
   Dès que l'on précise le centre et le rayon, il y a unicité du cercle, par conséquent il convient de dire ≪ LE cercle de centre ... et de rayon ... ≫ et non ≪ UN cercle de centre ... et de rayon ... ≫
   Nombreux sont les candidats qui vérifient que $\forall t \in I_0$, $x_0^2(t) + y_0^2 = 1$... ce qui ne donne qu'une inclusion dans le cercle.
2. Les formules de duplication ne sont pas bien connues. De plus, il fallait faire attention à I_1, ce que peu de candidats ont fait.
   Enfin, de nombreux candidats ont reconnu un cercle de centre 0 et de rayon $\cos(t)$!
   (argument que l'on a trouvé aussi dans la question B.2. pour justifier que la courbe Λ_2 est de longueur finie)

Partie B :

1. Un peu plus d'un candidat sur deux connait la formule de la longueur...
   On compte quelques $\mathrm{e}^{-\ln(3)} = -3$... et un certains nombre de candidats est incapable de dériver $t \mapsto \cos(t)\mathrm{e}^t$!
2. La justification est souvent maladroite et contrairement à ce qu'affirment certains candidats, x_2 n'a pas de limite en $+\infty$.
3. De nombreuses confusions entre tangentes horizontales et verticales.
   Les candidats arrivent très souvent à $\cos(t) = \sin(t)$ (ce qui suffisait) puis à $t = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$ mais se sont ensuite perdus dans les calculs.
   Les $\Leftrightarrow$ n'étaient pas indispensables (et pas toujours justifiés).
4. On trouve très souvent les vecteurs $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ mais bien plus rarement le repère de Frenet.
   Le rayon de courbure a eu moins de succès, les candidats utilisant les formules de Frenet ont mieux réussi que ceux utilisant le théorème de relèvement.
5. Une nouveauté cette année : beaucoup de candidats ont préféré chercher l'enveloppe des normales plutôt que le lieu des centres de courbure.
   Compte-tenu des nombreuses erreurs de calculs, seul un candidat sur six parvient au résultat.
6. Les candidats ont préféré utiliser la matrice de la rotation plutôt que les nombres complexes.

Partie C :

1. Rares sont les candidats qui font attention à l'intervalle I_3 proposé, ce qui conduit certains d'entre eux à étudier la périodicité ou d'autres opérations comme $t \mapsto t \pm \pi$ et à plusieurs reprises I_3' est devenu un intervalle fermé.
   Faire un schéma positionnant $M(-t)$ par rapport à $M(t)$ limite les erreurs de symétries...

2. On constate de nombreuses erreurs dans la dérivée de y_3.
   Les tableaux sont corrects mais il y manque régulièrement les zéros des dérivées.
3. Cette question est une déception pour les correcteurs : les candidats se contentent d'un « c'est un point stationnaire » et passent à la suite.
   Ceux qui tentent de trouver la nature du point, utilisent majoritairement les dérivées successives de x_3 et y_3 et ne sont que rarement arrivés au bout.
   Les développements limités usuels en 0 de $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$ à l'ordre 3 permettant de trouver la réponse en très peu de temps.
   Les candidats oublient régulièrement les « $o(t^3)$ » dans les développements limités.
   On rappelle que la tangente (et non tangeante ou tengente ou ...) est une droite et non un vecteur ; de plus, on voit encore trop souvent : « la tangente est nulle »
4. Trop de candidats font les calculs... mais ne concluent pas.
   Par ailleurs, il était demandé un vecteur directeur de la tangente, pas une équation ou une représentation paramétrique.
5. Les candidats ont tendance à se précipiter sur le calcul de $\dfrac{y}{x}$ sans regarder d'abord les limites de x et y.
   On note des confusions entre asymptote, direction asymptotique, branche parabolique et même tangente (à l'infini) et on trouve $x = \dfrac{\pi}{2}$ comme équation de l'asymptote.
6. Le principal défaut des courbes tracées concerne les tangentes et l'asymptote : elles sont souvent peu visibles (2 cm de long) sur les tracés et les courbes ne sont pas toujours assez tangentes à leurs tangentes.

Partie D :

1. Les résultats étant donnés, beaucoup de candidats sont arrivés au résultat... en prenant soin d'écrire plusieurs lignes (parfois fausses !).
   Cette question a mis en lumière la difficulté que représente la compétence « factoriser » pour de nombreux candidats.
2. Des confusions entre l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   L'intersection des deux droites a souvent donné... des objets bizarres (pas toujours identifiables) et non un point.
   Il est inquiétant de constater que la très grande majorité des candidats n'est pas capable d'obtenir un point et un vecteur directeur d'une droite dont on connait une équation cartésienne.
   En ce qui concerne la représentation paramétrique, il ne doit y avoir qu'un seul paramètre (appartenant à $\mathbb{R}$ et non I_4) qui ne doit pas s'appeler t.
   Dans certaines copies, il est impossible de faire la différence entre h et k.
3. Peu traitée compte-tenu de la question précédente et avec souvent de nombreuses erreurs (souvent dues au fait que les candidats ont remplacé trop tôt $h(t)$ et $k(t)$ par leur expression).
4. Cette question n'a pas posé de problème aux rares candidats ayant trouvé la bonne réponse à la question précédente.

Troisième exercice.

Partie A :

1. 85% des candidats résolvent correctement les trois équations... et un peu plus de 2% n'en ont résolu aucune avec succès.
2. (a) La grande majorité des candidats a réussi à déterminer le polynôme caractéristique. Il est souhaitable que les candidats indiquent les opérations effectuées si possible avec le bon codage. Cette remarque est valable aussi pour les systèmes de la question 2.(c).
   Entre deux déterminants, c'est le signe « = » que l'on doit trouver et non « $\Leftrightarrow$ » ou $\sim$. On note également quelques problèmes (absences) de parenthèses. Un simple calcul de trace aurait permis aux candidats s'étant trompés de constater leur erreur.
   Et comme les années précédentes, on trouve encore « les valeurs propres sont $\{-1, 0, 3\}$ »... mais un peu moins souvent.

   (b) Souvent imprécis : « trois valeurs propres », « condition suffisante de diagonalisation » (non précisée) ou avec des mauvais sujets : « A est scindée » ou dans un contexte non valable ici : « théorème spectral »... et toujours de nombreux « le polynôme caractéristique est scindé donc A est diagonalisable »
   A la lecture des copies, les correcteurs se demandent régulièrement si les candidats connaissent la définition d'un « polynôme scindé ».
   On rappelle qu'une matrice n'a pas de dimension et que le rang a une signification bien précise et qu'il ne désigne pas le nombre de lignes ou de colonnes de la matrice surtout que dans cette partie le rang de A était égal à 2.
   Trop de candidats se précipitent sur la détermination des sous-espaces propres, ce qui était inutile dans cette question.

   (c) Les sous-espaces propres sont parfois non justifiés et souvent mal justifiés : on ne sait pas le lien entre le sous-espace propre cherché et le système, absence de $\Leftrightarrow$ entre les systèmes, ou présence d'un $\Leftrightarrow$ entre un système et un espace vectoriel pour les candidats qui optent pour la méthode système ; rang de la matrice ou dimension du sous-espace propre non justifié pour ceux qui choisissent les combinaisons linéaires sur les colonnes.
   Il est regrettable de constater qu'un nombre non négligeable de candidats n'ont aucune réaction lorsqu'ils trouvent un sous-espace propre égal à $\{0\}$ et écrivent P^{-1} avec une matrice P ayant une colonne de zéros ou deux colonnes identiques.
   A de rares exceptions près, les candidats ont respectées les consignes concernant D.
   Il n'est pas utile de normer les vecteurs propres choisis pour construire P... et P n'était pas (ne pouvait pas être) orthogonale.
   Sauf si le sujet le demande, il n'est pas utile de calculer P^{-1}.
3. (a) Les candidats ayant procédé par double implication ont écrit - sans s'en rendre compte - deux fois la même chose.
   Les candidats qui ne montrent qu'une implication (avec des « car », des « donc » ou des « $\Rightarrow$ ») ou qui n'écrivent pas le moindre lien entre les lignes et qui concluent par une équivalence sont relativement nombreux et n'ont obtenu aucun point sur cette question.
   Il n'est pas utile de faire une récurrence pour établir que $M^2 = P\Delta^2P^{-1}$.

   (b) Les problèmes les plus fréquemment rencontrés sont : des équivalences lors de la multiplication par M (a priori non inversible) et des candidats qui affirment que D et Δ commutent car D est diagonale.

(c) La première partie de la question est souvent bien traitée - si on ignore l'équivalent lors de la multiplication par X.
Des confusions sont notées entre ≪ appartenir à un sous-espace propre ≫ et ≪ être un vecteur propre ≫... surtout que dans ce sujet, Y pouvait être nul.
Trop de candidats écrivent ≪ LE vecteur propre ≫.
La seconde partie de la question est très peu abordée.

(d) Des explications confuses : A et M ont les mêmes sous-espaces propres (ou les mêmes vecteurs propres), ce qui est faux à priori, ou qui commencent par : M a trois valeurs propres distinctes ou M est diagonalisable...

4. (a) Question bien traitée quand elle l'a été... on regrette juste que certains candidats n'aient pas trouvé le courage d'écrire les 4 matrices.

(b) Ceux qui ont traité la question précédente ont généralement fait également celle-ci.
La consigne concernant l'expression des matrices M n'a pas toujours été respectée.

Partie B :

1. Cette question qui ressemblait à la question 3.(a) de la partie précédente a été plutôt réussie.
2. La question A.3.(c) a inspiré les candidats et le taux de réussite est un peu inférieur à la précédente.
Outre de nombreux équivalents inutiles et faux, les candidats oublient de rappeler qu'un vecteur propre est non nul.
On constate également quelques produits qui n'existent pas.
3. (a) La grande majorité des candidats ont transformé le ≪ si ... alors ≫ de la question précédente en ≪ si et seulement si ≫.
Ceux qui ne l'ont pas fait, semblent ignorer qu'il existe des matrices non diagonalisables.

(b) Mêmes remarques qu'à la question précédente.
Rares sont les candidats qui ont envisagé le cas où λ_1 est valeur propre double.
S'intéresser au signe de Δ (le discriminant et non le déterminant) n'avait pas de sens puisque α était un nombre complexe.

(c) Il y a ceux qui ont vérifié que les matrices diagonales données à la question précédente était solution de l'équation et qui ont conclu grâce à la question 1. et ceux (souvent confus) qui ont redémontré la question 1 sans vérifier que les matrices diagonales étaient des solutions.

(d) Il y a eu quelques matrices diagonales (dont la matrice nulle), un certain nombre de matrices M (trouvées au hasard ?) qui ont souvent obligé les correcteurs à calculer M^2, des matrices proposées après une longue résolution de système (fausse puisqu'il aurait dû y avoir une infinité de solutions et non une seule), ...
La question précédente a été peu exploitée.