

MATHEMATIQUES A

Présentation générale :

Le sujet de cette année consistait en deux problèmes indépendants : l'un de probabilités, avec trois parties indépendantes et l'autre d'algèbre constituant respectivement 60% et 40% du sujet.

Le problème de probabilités abordait une très large partie du programme de probabilités de PTSI/PT : probabilités, variables aléatoires finies et discrètes, lois usuelles, couples de variables aléatoires.

Le second problème s'intéressait à la méthode des moindres carrés et était donc tourné vers l'algèbre bilinéaire. Il se terminait par une application industrielle de la méthode.

La longueur du sujet pourra avoir été ressentie diversement en fonction de l'aisance des candidats devant les calculs.

Les deux problèmes comportaient de nombreuses applications directes du cours. Il a été constaté que la connaissance de celui-ci laissait souvent à désirer.

Cela donne l'impression que certains candidats font des impasses sur certains points du programme (peut-être en fonction des écoles souhaitées)... il est rappelé que tous les points du programme peuvent tomber à l'oral.

En particulier, 6% des candidats n'obtiennent aucun point en probabilités, soit 8 fois plus qu'en algèbre - dans les 2 situations, les deux tiers des candidats n'ayant eu aucun point ont fait l'impasse sur le problème considéré.

Il a également été constaté de nombreuses réponses incorrectes ou incomplètes faute d'avoir lu attentivement l'énoncé et que dans les questions où il est demandé de démontrer deux résultats, il en manque souvent un.

Bien que l'on ait trouvé peu de très bonnes copies, l'épreuve a parfaitement permis de classer les candidats.

Présentation des copies :

Cette année figurait pour la première fois dans l'en-tête du sujet la mention : « les questions non correctement référencées ne seront pas notées ».

Cela a sans doute incité un grand nombre de candidats à faire attention, même si l'on rencontre encore des copies où il n'est pas indiqué quel est le premier problème traité et quelques unes qui font des allers-retours entre les 2 problèmes sans que cela soit bien clair. Par ailleurs, il est conseillé aux candidats qui sont amenés (oubli, erreur détectée, ...) à rédiger une question sur une autre page que celle qui serait naturelle d'indiquer au correcteur où elle a été traitée.

La proportion des candidats qui obtiennent le maximum de points en présentation a légèrement augmenté, et il est surtout constaté une nette diminution des candidats qui n'obtiennent aucun point.

Les futurs candidats sont donc invités à poursuivre dans cette voie.

Par contre, il a été constaté que l'orthographe et la grammaire se sont dégradées dans un nombre grandissant de copies obligeant les correcteurs à lire plusieurs fois ce qui est écrit pour parvenir à faire abstraction des fautes rencontrées, ou à lire le texte à haute voix pour en comprendre le sens : « il à eût tirer », « avant qu'Alice est mangé 2 bonbons »... sans parler des orthographes diverses du mot « menthe » (mant, ment, mente, manthe, menthe) - pour ne citer que celui-ci - qui est pourtant écrit dans le sujet.

On trouve aussi régulièrement des phrases que, même avec la meilleure volonté, les correcteurs ne parviennent pas à comprendre : « la probabilité que les autres qui a mangé le bonbon est nul ».

Il serait également souhaitable d'éviter les « on a que » ou « on a ... qui ... ».

De plus, il est rappelé que les noms propres s'écrivent avec une majuscule : Bernoulli, Gram-Schmidt, Poisson, Gram-Schmidt, ..., Alice et Cyril... Et l'orthographe des noms de tous les mathématiciens précédemment cités devrait être correcte !

Rédaction :

Quelques conseils de rédaction que le jury aimerait voir appliqués :

- Les notations de l'énoncé doivent être respectées, en particulier celle du produit scalaire qui était φ et non $(|)$ ou \langle , \rangle .

Si les candidats ont besoin de notations qui ne figurent pas dans l'énoncé, ils doivent les définir et utiliser dans la mesure du possible des notations qui ne prêtent pas à confusion. En particulier, il aurait été souhaitable que les paramètres des deux lois géométriques de la partie B du problème de probabilités ne s'appellent pas tous les deux p et que le « deuxième » polynôme utilisé pour démontrer la bilinéarité du produit scalaire ne soit pas noté P' .

- De même les consignes de l'énoncé doivent être respectées. Une réponse, même juste, qui ne respecte pas les consignes ne peut pas être prise en compte.

En particulier, si une question commence par « en déduire », toute réponse n'utilisant pas la ou les réponses aux questions précédentes ne peut convenir.

- Tous les résultats et calculs doivent être justifiés. On trouve bien trop souvent, surtout en probabilités des affirmations sans preuve.

Par ailleurs, quand un résultat est fourni par l'énoncé, il est impératif que le détail des calculs figure sur la copie afin de convaincre le correcteur que le candidat ne cherche pas à bluffer.

- Les correcteurs apprécient que le candidat annonce quel est son objectif et encore plus que le candidat, à l'issue de ses calculs, termine la question par une conclusion (qu'il encadre) et non par l'un des nombreux « CQFD » qui ont fleuri cette année sur les copies.

- Les candidats doivent réfléchir à la nature des objets mathématiques qu'ils manipulent. Ainsi, cela leur évitera d'écrire des égalités entre des objets de différentes natures ou d'écrire des phrases comme « les probabilités z_A et z_B forment un système complet d'événements ».

- Les fractions doivent être mises sous forme irréductibles : il a été rencontré trop de lois de Bernoulli de paramètre $\frac{19}{38}$, de lois géométriques de paramètre $\frac{6}{16}$ ou d'espérance de Z_2 égales à $\frac{15}{3}$.

Les auteurs des sujets se réservent la possibilité pour les futures sessions de prévoir dans le barème une pénalité pour les candidats qui ne simplifient pas les fractions (ainsi que les racines carrées), avec une tolérance pour les lois de probabilités où toutes les probabilités pourront être laissées au même dénominateur (le plus petit possible).

D'autres remarques et conseils concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Par ailleurs, il était possible dans ce problème de vérifier très rapidement la cohérence de nombreux résultats obtenus.

Nous invitons les candidats à le faire et en cas d'incohérence, à reprendre leurs calculs ou

au minimum à indiquer au correcteur pourquoi ils pensent que leurs résultats sont faux.

Problème I : Probabilités.

Partie A

1. (a) Les candidats ont généralement reconnu la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ même si parfois la valeur du paramètre p n'est pas donnée ou cachée au milieu des phrases précédentes (quand on a un semblant de justification, ce qui est rare).
Des confusions entre loi de Bernoulli, épreuve de Bernoulli et aussi variable aléatoire sont constatées.
Il y a eu quelques lois binomiales avec une valeur de n souvent non précisée ou égale à 20, et quelques lois uniformes de paramètres 2 ou $\frac{1}{2}$. Les lois binomiales de paramètres $n = 1$ et $p = \frac{1}{2}$ ou la loi uniforme sur $\{0, 1\}$ ont été acceptées.
Il est demandé aux candidats de donner d'abord le nom de la loi en toutes lettres, et ensuite, s'ils en ont besoin, ils pourront utiliser les notations usuelles.
- (b) Il est conseillé dans cette question de donner les valeurs en fonctions du (des) paramètre(s) puis de faire les applications numériques. Ces résultats étant au programme, aucune démonstration n'est demandée.
La valeur de l'espérance est bien connue, celle de la variance un peu moins.
Il a été constaté qu'un nombre de plus en plus important de candidats ne font pas les applications numériques, ce qui est sanctionné.
2. (a) Il était attendu ici, la formule des probabilités conditionnelles avant de faire le produit $\frac{1}{2} \times \frac{10}{19}$.
Il a été constaté des confusions entre les notations $P(X_A = 0, X_C = 0)$ et $P(X_C = 0 | X_A = 0)$.
- (b) L'expression « loi conjointe » semble inconnue à de nombreux candidats... pourtant la question précédente les guidait.
La synthèse des résultats sous forme de tableau est acceptée.
3. Pour obtenir la totalité des points, les candidats devaient citer la formule des probabilités totales et écrire le système complet d'événements associé... ce qui est fait par à peine un candidat sur six.
Peu de candidats signalent reconnaître une loi de Bernoulli.
4. (a) Moins d'un candidat sur deux traite cette question, ne serait-ce qu'en écrivant la définition de la covariance.
Pour ceux ayant écrit cette définition, il est ensuite constaté que le calcul de l'espérance de $X_A X_C$ pose souvent problème.
- (b) Un grand nombre de candidats a su exploiter correctement le résultat de la question précédente (ou ceux de la question 2) malgré quelques « si et seulement si »
5. Les candidats ont souvent oublié un cas dans leur énumération et donc n'établissent qu'une inclusion.

6. (a) Les candidats qui se sont posés la question de savoir ce que représentait la variable Y ont répondu efficacement à cette question, les autres ont souvent perdu du temps en étudiant de multiples cas, sans toujours parvenir à la bonne réponse.
- (b) Les candidats semblent savoir qu'une variable aléatoire constante est indépendante de toutes les autres (bien que cela soit pas un résultat explicite du programme et donc pas la méthode attendue)... Ceux qui ont tenté de le justifier ont rarement été convaincants.
- (c) Ceux qui connaissent la définition de la covariance ont bien traité cette question.
- (d) Beaucoup d'inégalités strictes qui sont rarement justifiées (et qui n'étaient pas demandées).
A noter que quelques candidats pensent que le signe de la variance dépend des valeurs prises par la variable aléatoire.
7. Des explications souvent peu claires de la forme « tel truc correspond à... donc la formule donnée par l'énoncé est correcte ».
La notation $\overline{X_C}$ pour désigner $1 - X_C$ n'existe pas.
8. Si la linéarité de l'espérance est bien connue, par contre, il n'en est pas de même pour la relation entre la variance de $(X + Y)$ et la covariance de (X, Y) , ce qui a conduit les candidats à déterminer la loi de Y_A .
9. A l'exception des candidats qui prennent sans justification $n = 2$ et/ou $p = \frac{1}{2}$ ou ceux qui affirment que pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale le quotient de la variance par l'espérance est un entier, les candidats ayant traité la question sont arrivés au résultat souhaité.

Partie B

1. (a) Les candidats ont majoritairement reconnu une loi géométrique avec le bon paramètre (dont la valeur est parfois cachée dans les explications) - même si cette année, on a vu apparaître quelques lois géométriques avec deux paramètres, n (inconnu) et p - et une amélioration est constatée concernant l'univers image et les probabilités associées.
Par contre, la justification est souvent absente ou se limite à « on reconnaît la loi du premier succès » ce qui n'est pas suffisant puisque la loi « du premier succès » dépend des conditions dans lesquelles les expériences sont réalisées.
- (b) La valeur de l'espérance est relativement bien connue, celle de la variance beaucoup moins. Les candidats sont invités à définir q .
Ici aussi, nombreux sont les candidats qui donnent les formules et qui ne font pas les applications numériques !
- (c) Le résultat étant donné, les candidats sont arrivés au résultat, la plupart du temps en rajoutant au moins deux étapes.
En ce qui concerne D_1 , il n'est pas suffisant de déterminer le rayon de convergence de la série entière.
- (d) Beaucoup d'erreurs car les candidats ne font pas attention à la borne inférieure de la somme de la série.
De plus, de nombreuses expressions proposées ne sont pas simplifiées : présence d'une fraction de fractions et/ou d'une soustraction.

- (e) L'expression des coefficients d'une série entière à l'aide des dérivées en 0 de sa somme est bien peu connue des candidats.
Si $G_1(0)$ vaut souvent 0, il est aussi régulièrement égal à p ou q ou $\frac{p}{q}$...
2. Lorsque la question est traitée, la plupart des candidats reconnaissent la loi. Le reste des résultats est cohérent avec ceux annoncés dans les questions précédentes.
3. (a) Z est souvent comprise mais la formulation parfois maladroite ou ambiguë (le dernier bonbon tiré compte-t-il?).
La linéarité de l'espérance est souvent citée (parfois avec l'argument de l'indépendance de Z_1 et Z_2 .)
- (b) Peu de bonnes réponses. On trouve même des univers-images finis.
- (c) La somme est plus souvent proposée que le produit... et le produit rarement justifié par l'indépendance des variables aléatoires.
- (d) La formule de Leibniz est très peu connue (la somme commence presque toujours à 1, quelquefois à 2) et presque jamais justifiée.
- (e) Très peu traitée. Ceux qui la traitent ne font pas attention au fait que la valeur de $G_1^{(k)}(0)$ n'a pas la même expression suivant que k est nul ou non.
- (f) Voir la question 1.(e)
- (g) Là aussi, les candidats ne font pas attention à la borne inférieure de la somme définissant l'espérance.

Partie C

1. La réponse se trouvait dans l'introduction du sujet.
La justification donnée a souvent été une paraphrase de la question en remplaçant les proportions par le nombre de bonbons ou des pourcentage ou des probabilités (avec (a, c) est un système complet d'événements!).
2. (a) On trouve trop souvent des signes $+$ ou \times entre les événements et ainsi que de nombreuses erreurs dans les indices.
Le protocole concernant les tirages n'a pas toujours été compris.
- (b) Le résultat est bien peu justifié et de nombreux candidats disent que les événements M_n et N_n (n fixé) étaient indépendants.
- (c) Ceux qui ont compris le protocole ont généralement bien répondu avec malgré tout un vocabulaire ou des notations pas toujours exacts : C_{2p} n'existe pas, est nul ou négligeable ou presque impossible ou ... et $C_{2p} = \{\emptyset\}$.
Quant aux autres, c'est souvent la question 4. qu'ils font ici.
3. Il était attendu que les candidats fassent le lien entre $(X = 1)$ et les événements C_{2p+1} et qu'ils précisent que les événements C_{2p+1} étaient disjoints.
Il a été noté quelques « arrangements » dans les questions précédentes pour parvenir au résultat demandé.
4. Le raisonnement, similaire à celui des questions précédentes, est bien mis en place mais il est constaté une fois de plus que les candidats « arrangent » ou « ignorent » les indices des unions ou des sommes pour arriver au résultat demandé.
5. Rares sont les candidats qui terminent le calcul et parviennent à 0.
Pour ceux-là, l'interprétation est généralement correcte.

6. La plupart des candidats s'arrêtent à $a^2 = c$ et donc ne répondent pas à la question. Ceux qui arrivent au bout, éliminent la solution négative (pour a ou c), et oublient régulièrement de vérifier que l'autre est entre 0 et 1. On trouve quelques candidats qui signalent que a devrait être un rationnel.

Problème II : Algèbre.

1. (a) Sauf exceptions, les candidats ont pris soin de détailler les étapes.
- (b) Peu d'erreurs à l'exception des écritures incorrectes : $X \times -(X-2) \times -\frac{1}{2}(X-3)$ ou $X(X-1)(X-3) - \frac{1}{2}$.
- (c) Dans une question comme celle-ci, il est conseillé de faire figurer sur la copie au moins les premiers calculs puis d'abrégé.
Cela aurait évité les nombreux : $\forall (p, k) \in \llbracket 0; 3 \rrbracket^2, L_p(k) = 0$.
A noter qu'un candidat sur six ne traite pas cette question.
2. (a) Une grande majorité des candidats savent qu'ils doivent démontrer que φ est bilinéaire (et non billinéaire), symétrique et définie-positive et démontrent correctement que φ est bilinéaire, symétrique et positive.
Par contre, beaucoup oublient de justifier que φ est à valeurs dans \mathbb{R} (et non $\mathbb{R}_3[X]$ ou $\mathbb{R}_6[X]$).
Quand au caractère non dégénéré, il est peu justifié ou alors, on a des arguments tels que « un polynôme dont tous les coefficients sont nuls est nul », « un polynôme avec une infinité de racines est nul » et même « P^2 est continu et positif ».
Les candidats qui signalent 4 racines oublient régulièrement de les mettre en évidence : on passe directement de « $\sum_{k=0}^3 P^2(k) = 0$ » à « un polynôme de degré 3 (on a rarement inférieur ou égal à) ayant 4 racines est nul ».
- (b) Sur les 3 points qu'il fallait démontrer, il en manque très souvent un ou deux. Des confusions entre dim et card sont également notées.
- (c) Il s'agissait (presque) d'une question de cours. Elle a été peu traitée. Ceux qui ont répondu se sont souvent limités à l'expression de Q en fonction des polynômes L_p - souvent sans exprimer $\varphi(Q, L_p)$ - et donc n'ont pas répondu complètement à la question qui demandait des coordonnées.
Les candidats ayant essayé un changement de base sont rarement arrivés au résultat.
3. Le procédé d'orthogonalisation ou d'orthonormalisation de Gram-Schmidt semble peu connu des candidats et est souvent émaillé d'erreurs de calcul, tout particulièrement chez ceux qui norment les vecteurs au fur et à mesure.
On a souvent trouvé (L_0, L_1) qui ne sont pas dans $\mathbb{R}_1[X]$ ou $(-X, X-1)$ par une construction similaire aux L_p sans que les candidats se rendent compte qu'en procédant ainsi, ils changent de produit scalaire.
4. La situation a très souvent été comprise, même si parfois toutes les données ne figurent pas sur le schéma.
Les correcteurs ont apprécié les illustrations aérées et en couleur.

5. Il y a eu beaucoup de $dp = y_p - ap - b$, mais aussi $d_p = [M_p N_p]$ ou $d_p = \begin{pmatrix} x_M - x_N \\ y_M - y_N \end{pmatrix}$.
6. (a) Des confusions entre l'unicité de Q et celle de son expression dans une base.
Il est étonnant de voir que les candidats qui ont très certainement déterminé des sous-espaces propres de matrices à l'aide d'un système, écrivent « un système de 4 équations à 4 inconnues ne possède qu'une seule solution ».
- (b) La question est peu traitée mais plutôt réussie. On note surtout des confusions entre $Q(X)$ et $Q(p)$.
- (c) C'est presque toujours confus. La définition de la distance est mal connue : il y a bien un minimum mais pas toujours au bon endroit. Il est difficile de savoir de quel espace vectoriel il s'agit (souvent, on croit comprendre que c'est la droite d'équation $y = ax + b$!) et l'expression « projeté orthogonal de ??? sur ??? » est rare et encore plus rarement complète.
7. La plupart des candidats ont fait l'impasse sur cette question et la suivante pour aller directement à la question 9.
8. Les rares propositions parlent de la hessienne qui ne donne pourtant que des informations locales ou alors de paraboles « sourire »... pour lesquelles on ne sait pas du tout quelle est la variable.
9. (a) Des candidats ont mal lu l'énoncé et ont tracé les points de coordonnées $(t, C(t))$. Il n'est pas toujours possible de savoir qui est $M(k)$ (et non M_k).
Enfin, savoir choisir une unité adaptée à la situation fait partie des compétences que l'on peut attendre d'un futur ingénieur, tout comme indiquer les graduations et légendes des axes.
A noter que des candidats sont étonnés de trouver une « courbe » croissante!
- (b) « Les points devraient être alignés » (et non allignés) n'est justifié qu'une fois sur deux.
« Ils ne sont pas alignés » n'est presque jamais justifié.
Quant à l'explication, les candidats mettent plus souvent en cause les lois de la physique plutôt que de parler par exemple des incertitudes sur les mesures (il y a pourtant un paragraphe entier sur ce thème dans le programme de Sciences Physiques de PTSI et celui de PT, sans compter qu'en pratique, les mesures sont des nombres décimaux) ou d'évoquer des conditions de mesures qui ne sont pas celles avec lesquelles la loi est obtenue.
10. (a) La question a été mal comprise, en particulier le « en théorie » et le plus souvent, les explications sont peu précises et aboutissent rarement à une explication concrète sur l'obtention de c et k .
On trouve quelques candidats qui expliquent que s'ils avaient été en SPC, en SII (et même en SVT) - mais apparemment, en mathématiques, ce n'est pas possible -, ils auraient déterminé a et b puis auraient obtenu c et k en faisant $c = \dots$ et $k = \dots$
- (b) Faute d'avoir traité les questions 7 et 8, les candidats ne pouvaient répondre correctement à cette question.
Ceci dit, il est louable que les candidats aient été nombreux à s'appropriier les données expérimentales pour en déduire une droite « proche » de celle cherchée, ce qui leur a permis de traiter la question suivante.
Il est simplement dommage, que les calculs effectués n'aient pas été expliqués.

- (c) Le résultat n'est pas souvent arrondi à l'entier le plus proche.
Par ailleurs, si l'auteur du sujet n'a pas cherché à prendre des valeurs numériques qui correspondent à une situation réelle (pour que les calculs restent faisables à la main), il avait néanmoins veillé à ce que le résultat de cette question ne soit pas aberrant. Aussi tous les candidats qui trouvent des durées incluses entre 10 et 30 secondes ou même 15 minutes devraient réagir !