MATHEMATIQUES B

Présentation générale :
Le sujet de cette année se composait d'une importante composante d'algèbre linéaire et bilinéaire et deux composantes plus modestes de géométrie : géométrie plane dans un cas, mélangeant coniques et probabilités ; géométrie dans l'espace dans l'autre cas.
Ces trois parties indépendantes étaient précédées de quelques questions de cours et on trouvait également dans le sujet de nombreuses questions consistant à appliquer directement un résultat du cours.

Le sujet bien qu'un peu trop long a parfaitement permis de classer les candidats.

Nous rappelons aux candidats que dans un sujet de géométrie, ils ne doivent pas hésiter à illustrer leurs réponses par un schéma.
Les candidats qui le font à bon escient sont récompensés.

Présentation des copies :
La présentation des copies reste toujours insuffisante cette année : écriture indéchiffrable ou minuscule, copies couvertes de ratures, résultats non encadrés, questions ou parties non numérotées, orthographe et règles de grammaire non respectées y compris lorsqu'il s'agit de recopier une phrase écrite dans l'énoncé...
Nous avons bien souvent l'impression de lire des brouillons et non des copies rédigées.

Il est rappelé aux candidats que leurs copies sont destinées à être lues et que des points sont prévus dans le barème pour la présentation des copies.
Cette année, moins d'un candidat sur quatre a obtenu les points de présentation.

Nous renvoyons aux rapports des années précédentes pour connaître les critères a respecter pour obtenir ces points.

On trouve heureusement aussi des copies, très agréables à lire, où on suit sans aucune difficulté le raisonnement et les calculs du candidats. Ces copies sont valorisées.

Rédaction :
Quelques conseils de rédaction que nous aimerions voir respectés :

• Les notations de l'énoncé doivent être respectées.

Si les candidats ont besoin de notations qui ne figurent pas dans l'énoncé, ils doivent les définir et utiliser dans la mesure du possible des notations qui ne prêtent pas à confusion.

• De même les consignes de l'énoncé doivent être respectées. Une réponse, même juste, qui ne respecte pas ces consignes ne peut pas être prise en compte.

• Tous les résultats doivent être justifiés. On trouve bien trop souvent des affirmations sans preuve.

Par ailleurs, quand un résultat est fourni par l'énoncé, il est impératif que le détail des calculs figure sur la copie afin de convaincre le correcteur qu'on ne cherche pas à l'arnaquer.
Ces tentatives d'arnaque indisposent les correcteurs et sont sanctionnées.

• Les correcteurs apprécient que le candidat annonce quel est son objectif et encore plus que le candidat à l'issue de ses calculs, termine la question par une conclusion (qu'il encadre).

• Les candidats doivent réfléchir à la nature des objets mathématiques qu'ils manipulent. ainsi, cela leur évitera de dériver une courbe ou d'écrire des égalités entre des objets de différentes natures.

• Dans une épreuve de géométrie, il est souhaitable que les vecteurs soient écrits avec une flèche.

De plus, on remarque que de nombreux candidats utilisent le signe « $\Leftrightarrow$ » sans en comprendre la signification. De même des questions en « si ... alors ... » sont régulièrement traitée à l'envers ou à l'aide de « si et seulement si ».
Enfin, concernant les produits de matrices, il est demandé que les 3 matrices A, B et AB soient écrites sur la même ligne, les unes derrières les autres, avec la présence d'un signe « = » à l'endroit opportun. Toute autre écriture doit être utilisée au brouillon.

D'autres remarques concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Avant de passer à ce détail, on rappelle aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre et que, comme indiqué sur le sujet, la feuille de papier millimétré doit être rendue avec la copie.

Quelques questions de cours.

S'agissant de questions de cours, aucune démonstration n'était demandée ou attendue. Celles qui ont parfois été proposées sont souvent incomplètes ou fausse.
9 éléments étaient demandés dans ces questions que cours, la répartition des candidats en fonction du nombre d'éléments corrects fournis est la suivante :

Nb éléments	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fréquence (en %)	6.7	7.3	9.5	10.5	10.1	11.9	11.9	13.6	11.1	7.5

Soit en moyenne, moins de 5 éléments corrects.

1. 75% des candidats répondent correctement à cette question.
2. 55.9% des candidats donnent correctement les 2 éléments, 17.1% aucun.
3. (a) 45% des candidats donnent correctement les 2 éléments, 33.2% aucun.
   (b) 35.4% des candidats donnent correctement les 2 éléments, 49.3% aucun.
4. 21.8% des candidats donnent correctement les 2 éléments, 53.3% aucun.

Première Partie.

1. (a) Les candidats utilisant la caractérisation des sous-espaces vectoriels oublient régulièrement de préciser de quel espace vectoriel.
   La base est souvent donnée sans justification, en particulier la liberté de la famille (I, J, K) est peu mentionnée. Quand elle est justifiée, c'est souvent par un « vecteurs non colinéaires ».
   Des confusions entre « rang », « dimension » et « cardinal ».
   (b) La base proposée est souvent correcte mais mieux ne vaut pas être trop regardant sur la justification... quand il y en a une.
2. (a) Globalement, la définition d'un produit scalaire est bien connue MAIS :
   Les candidats oublient trop souvent de mentionner que φ est à valeur dans $\mathbb{R}$ (est une « forme »)
   φ n'est pas linéaire (elle l'est à gauche ou par rapport à sa première

variable, par exemple)

On note des tentatives d'arnaque en particulier dans la symétrie et/ou le caractère non dégénéré.

Des candidats ont mal lu l'énoncé et travaillent sur E et non sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Des confusions sont remarquées entre linéarité et distributivité

On ne peut pas avoir en même temps : « $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \varphi(M, M) > 0$ » et « $\varphi(M, M) = 0 \Leftrightarrow M = 0$ ».

On trouve : $\text{tr}(AB)$ $=\text{tr}(A)\times\text{tr}(B)$, $\varphi(M, M)$ $=\text{tr}(M^2) \geqslant 0$ et même $M^2 \geqslant 0$!

(b) A l'exception de quelques candidats qui veulent démontrer que les matrices I et $J + K$ sont des matrices orthogonales, les candidats savent ce qu'ils doivent établir et y arrivent sauf que...
...un nombre conséquent de candidats effectue explicitement le produit $I\times(I+J)$ et régulièrement trouve que ce produit est la matrice nulle !

(c) Les formules et/ou méthodes sont trop peu connues.

(d) Rares sont les candidats qui font le lien avec la question précédente. Beaucoup se contentent de normer les vecteurs I, J et K sans même vérifier ou mentionner qu'ils sont bien deux à deux orthogonaux.
Les deux termes de « minimum » et « supplémentaires » utilisés par l'énoncé sont ignorés par les candidats.

(e) Très peu traité. Certains candidats exhibent un ensemble et se contentent de vérifier qu'il convient. Les correcteurs préféraient lire le raisonnement qui a permis de trouver cet ensemble.

3. Cette question massivement abordée par les candidats est ratée...

(a) Un candidat sur trois parvient à donner une réponse correcte.
Pour les autres :

Le discriminant (et non le déterminant) est faux, faute de savoir développer $-4(a^2 - bc)$.

Les formules donnant les racines sont inexactes.

Des confusions entre a, b et c de $M(a, b, c)$ et $aX^2 + bX + c$.

Des candidats ne mènent pas la discussion demandée par l'énoncé ou discutent suivant le signe de α.

Le cas $bc = 0$ est souvent oublié, voire même exclus (puisque $(b, c) \neq (0, 0)$), ce qui n'empêche pas ces candidats de (mal) traiter la question (c).

(b) Les réponses sont souvent incomplètes (2 cas sur les 4 possibles sont évoqués) et rarement justifiées ou justifiées correctement.
Les correcteurs ne comptent plus les « le polynôme caractéristique est scindé (où ?) donc la matrice est diagonalisable » et les « toutes les matrices sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ » !

(c) Aux arguments précédents, on peut rajouter « la matrice possède une valeur propre double donc n'est pas diagonalisable » ainsi que de nombreux sous-espaces propres qui sont réduit à 0 ou qui contiennent des matrices.

4. Entre les candidats qui ne connaissent pas la question de cours 4., ceux qui ne font pas le lien avec cette question de cours et ceux qui ont mal lu l'énoncé (on demandait les isométries qui sont dans $\mathcal{E}$, pas celles de $\mathbb{R}^2$)... il ne reste plus grand monde.

5. (a) Là aussi, on note une mauvaise lecture de l'énoncé avec des candidats qui cherchent à résoudre l'équation $M^2 = M$.
   On note quelques confusions avec les matrices de symétrie dans une base adaptée.
   Un candidat sur quatre donne une réponse correcte.
   (b) Les candidats (qui ont correctement répondu à la question précédente) ont souvent trouvé la forme de la matrice mais ont oublié d'étudier la réciproque.
   (c) Très peu traitée.
   Des candidats ont déterminé les sous-espaces propres et n'ont pas vérifié que ceux-ci étaient orthogonaux.
   D'autres pensent à tort que la matrice d'une projection orthogonale est une matrice orthogonale.
6. Les démonstrations sont peu convaincantes. Rares sont les candidats qui donnent un contre-exemple.
7. (a) On lit trop souvent $kM_0^2 \in \Delta \Leftrightarrow M_0^2 \in \Delta$.
   Nombre de candidats proposent la même démonstration pour « $\Leftarrow$ » et « $\Rightarrow$ » et il n'y a pas toujours les 2 sens.
   (b) i. Pas de problème pour ceux ayant lu correctement la question. D'autres essayent de résoudre l'équation $M_0^2 = \lambda M_0$ (dont on ne sait pas qu'elle est l'inconnue).
   ii. Il y a ceux qui ne comprennent pas le « si ... alors » et qui vérifient que J^2 et K^2 sont nuls.
   Les autres posent le système. Sa résolution arrive au résultat demandé sans qu'il soit toujours facile de suivre la démarche qui permet d'y arriver. On voit régulièrement $a^2 + bc = 0 \Leftrightarrow a^2 = bc = 0$.
   iii. Pas de problème pour les candidats (pas assez nombreux) qui connaissent la caractérisation des projecteurs à l'aide du carré de leur matrice.
   (c) Il s'agissait de faire la synthèse, avec étude de la réciproque, des questions précédentes. Peu de candidats s'en sont révélés capables.
8. (a) Il y a les candidats qui ont uniquement vérifié que le produit $I \times J$ est encore dans le plan et ceux (influencés par la question précédente ?) qui ont uniquement vérifié que $(aI + bJ)^2$ est encore dans le plan... mais malgré tout un petit quart de démonstrations correctes.
   (b) Voir la question 6. mais en encore moins convainquant pour ne pas dire faux.
   (c) La stabilité est un peu mieux réussi qu'à la question (a) mais de nombreux candidats ont oublié de justifier que l'ensemble proposé est bien un plan.
   (d) Voir (a).
   (e) Une petite trentaine de candidats ont proposé un début de démonstration plus ou moins avancée. Aucun n'est arrivé au bout.

Deuxième Partie.

1. (a) Tout d'abord, il serait souhaitable que les candidats respectent l'orthographe de « théorème spectral » et de « ellipse ».
   La majorité des candidats connaissent le principe d'étude d'une conique et on reconnu une ellipse. Malheureusement, peu (10%) sont arrivés au bout sans

erreur.
Les principaux problèmes rencontrés sont :

Une matrice P non orthogonale ;

Des erreurs de calculs (les candidats devraient prendre le temps et la place de les mener) ;

Un centre dont les coordonnées n'ont pas été données dans le repère demandé ;

La difficulté pour les correcteurs de trouver dans quel repère les équations et coordonnées sont données ;

Des sommets en nombre insuffisant.

Les réponses ont rarement été mises en évidence, les correcteurs ont souvent eu du mal à les trouver !

(b) La bonne nouvelle, c'est que nombreux ont été les candidats qui se sont lancés (avec plus ou moins de succès) dans le tracé.
Les éléments cherchés par les correcteurs sont :

Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ avec la bonne longueur ;

Les vecteurs « de la nouvelle base » et le centre de l'ellipse ;

Les 4 sommets avec un tracé pas « pointu » au niveau de ces sommets ;

Le dessin est dans la feuille (ce qui nécessite une réflexion pour placer l'origine du repère... mieux valait commencer par placer le centre de la conique)

2. Des candidats essayent de discuter les cas a priori et finissent par en oublier.
La discussion sur le signe de $a^2 - b^2$ s'est souvent terminée (soit dans cette question, soit dans la question suivante) en une discussion sur le signe de $a - b$.

3. (a) Le calcul est souvent réussi mais les candidats ne sont pas suffisamment nombreux à justifier spontanément la convergence de la série.
Et, hélas, cette justification se résume souvent à $(1 - p_A)(1 - p_B) < 1$, ce qui n'est pas suffisant.

(b) Un candidat sur 5 a fait le lien avec l'univers-image d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

(c) De nombreuses bêtises sur les probabilités et les variables aléatoires : A et B sont des événements indépendants, $P(A = k) \cap P(B = k)$; $P((A \cap B) = k)$,...
De plus les correcteurs souhaiteraient que les vagues « par indépendance » soient remplacés par un « car les variables aléatoires A et B sont indépendantes » et que la somme soit justifiée à l'aide d'un système complet d'événements.

(d) Pas de problème pour les candidats connaissant les probabilités associées à la loi géométrique.

(e) Idem. Les explications concernant un nombre d'échec sont souvent vaseuses.

(f) L'étape intermédiaire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(A = k)P(B > k)$ a souvent été produite, mais trop peu justifiée, pour ceux ayant établi le résultat.

(g) On a souvent des arguments de la forme « si $A < B$ alors $\mathcal{C}_{a,b}$ est une hyperbole », ce qui ne permet pas de justifier l'égalité $P(A < B) = P(X = -1)$.
La valeur de $P(X = 1)$ (avec parfois des erreurs de calculs) est bien justifiée.

(h) Pas de soucis pour les candidats ayant répondu aux questions précédentes

Troisième Partie.

1. (a) Cette question que l'on retrouve très régulièrement dans les sujets de Mathématiques B est toujours aussi peu ou aussi mal traitée.
   Pour ceux qui parviennent au bout, la rédaction laisse encore à désirer.

   (b) Quelques tentatives d'arnaque, des gradients qui ne sont pas des gradients. La méthode semble toutefois bien connue.
   Attention toutefois aux « et » et aux « ou » avec le signe « $\neq$ ».

   (c) Comme tous les ans, il y a les plans qui ne sont pas des plans, les plans qui passent par O et pas par A et de nombreuses erreurs de calculs.
   Par ailleurs, une simplification par 2 ou mieux $2\sqrt{2}$ aurait été appréciée.

   (a) Quelques tentatives d'arnaques mais la question est plutôt bien traitée quoique pas souvent bien rédigée.

   (b) Très peu réussie. Des candidats ont bien cherché à établir une représentation paramétrique de droite mais n'ont pas su par quel point la faire passer.

   (c) L'argument « les cylindres (ou les cônes) sont des surfaces réglées développables » bien que juste n'est pas recevable car ne figurent plus au programme depuis le concours 2015 (tout comme les ellipsoïdes et paraboloïdes cités par quelques candidats dans la question 1).

2. (a) Voir 2.(a) mais avec beaucoup plus de tentatives d'escroquerie.

   (b) Voir 2.(b)

   (c) La plupart des candidats se contentent de mettre au même dénominateur et de supprimer celui-ci sans justification.
   D'autres vérifient uniquement que le point Ω vérifie l'équation donnée.

   (d) Relativement bien traitée. Attention toutefois aux articles « un » et « le ».

   (e) Voir 2.(c)