

Rapport sur l'oral de Mathématiques I

Remarques générales

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *interrogateur* désignera une interrogatrice ou un interrogateur.

L'oral, qui dure 30 minutes (y compris la phase de vérification d'identité) est séparé en deux parties : 25 minutes sont consacrées à la résolution d'un exercice sans préparation, et le temps restant est consacré à une question de cours, sur un sujet différent de celui de l'exercice.

L'exercice proposé au candidat porte sur l'ensemble du programme des deux années de préparation (algèbre, analyse, probabilités et géométrie), et est de difficulté graduelle, les premières questions étant toujours très abordables. Les exercices sont répartis de façon équilibrée entre algèbre, analyse, probabilités, géométrie. Lorsqu'un deuxième exercice est proposé, il porte sur une autre partie du programme.

Les exercices font l'objet d'une concertation entre les membres du jury, qui veillent à ce que leurs difficultés soient comparables. Ces exercices présentent en général au moins trois ou quatre questions, la première, voire les deux premières, étant systématiquement faciles, leur solution n'excédant pas deux ou trois lignes. Donnons quelques exemples déjà cités dans le rapport précédent :

↪ Tracer rapidement la courbe d'équation $y = x^3 - x$.

↪ Déterminer selon la valeur du réel a le rang de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

↪ Montrer que si la fonction réelle $x \mapsto x^2 f^2(x)$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ , il en est de

même de la fonction $x \mapsto f^2(x)$.

↪ Déterminer une représentation paramétrique de la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

↪ Si X suit une loi géométrique de paramètre p et si $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\mathbb{P}([X \geq n])$$

Les exercices sont conçus ainsi pour mettre en confiance le candidat.

Le jury souhaite cette année insister sur les points suivants :

↪ Beaucoup de candidats semblent bien formés et aguerris au déroulement d'un oral : il s'expriment clairement, écoutent les conseils et remarques de l'examineur et en tiennent compte.

Certains candidats en revanche, parlent de façon difficilement intelligible et se montrent particulièrement laconiques, malgré les tentatives de l'examineur de les amener à expliquer ce qu'ils savent ou à exposer des pistes de résolution.

↪ Beaucoup de candidats ont des tics de langage à l'oral :

↪ « ouais » - qui est un mot familier.

↪ « on est sur une loi de Bernoulli ».

↪ « pas de souci ».

↪ « on va dire que ».

↪ « ma probabilité, mon théorème ».

↪ « du coup ».

↪ Un oral n'est pas un écrit : il n'est pas nécessaire de tout écrire au tableau.

↪ Un oral n'est pas une colle : il ne faut pas attendre la validation de l'examineur avant de se lancer dans un calcul. On le répète chaque année. Par exemple, plutôt que dire « on pourrait faire une intégration par parties ? » avec un regard interrogatif, il faut dire « je vais essayer une intégration par parties », et commencer le calcul, quitte à s'arrêter vite si l'on voit que ce n'est pas la bonne méthode.

↪ On constate que de nombreux candidats sont passifs, sans dynamisme ou qui n'osent pas se lancer dans les calculs. Rappelons que la réflexion et la façon de rechercher sont évaluées autant que le résultat obtenu.

↪ L'attitude est dans l'ensemble satisfaisante. Rappelons que et qu'il est bon d'énoncer en entier les mots mathématiques : *sinus*, *cosinus*, *le noyau*, plutôt que « sin », « cos », « le ker », ...

Par ailleurs on ne dit pas « la limite tend vers ? », ni « la fonction admet un unique antécédent ».

↪ On constate un manque de recul sur les résultats du cours : il n'est pas rare de voir des candidats se lancer dans de long calculs avant de réfléchir. Par exemple lorsqu'un vecteur propre est évident, on peut se passer d'un système. Lorsque le sujet demande de vérifier que 1 est valeur propre, il suffit de vérifier que A-I n'est pas inversible au lieu de calculer le polynôme caractéristique.

Quelques erreurs fréquentes :

↪ Les calculs sont souvent très mal faits : très longs, avec de nombreuses erreurs. C'est à se demander si certains candidats n'attendent pas que l'examineur leur dise où est l'erreur de calcul. Des calculs élémentaires donnent de grandes difficultés, par exemple :

↪ $(x - 1)^2 = a^2$.

↪ $\sin x = \sin y$.

↪ $x^2 + 2x + 1 = 0$, on l'on voit des candidats calculer le discriminant.

↪ Dériver $x - x^2$ de tête.

↪ Trouver la deuxième racine d'un polynôme de degré 2 lorsqu'on en connaît déjà une. Par ailleurs, le réflexe de factoriser une expression ou de la simplifier n'est pas acquis chez nombre de candidats : il n'est pas rare de voir un 2 en facteur sur plusieurs lignes ou un résultat final de la forme $(x - 1)^2 + x(x - 1)$.

↪ Certains candidats sont surpris lorsqu'on leur demande une interprétation de la loi géométrique ou de la loi des grands nombres.

↪ Parmi les questions les moins bien réussies :

↪ Donner la définition de l'injectivité, la surjectivité.

↪ Tout le chapitre sur le dénombrement.

↔ Expliquer le lien entre matrice hessienne et extrema en utilisant la formule de Taylor-Young.

↔ Différence entre le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection.

↔ Etude d'une suite définie par une relation de récurrence de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n).$$

↔ Donner l'équation de la tangente à une courbe.

Remarques particulières

Analyse

↔ Les énoncés des théorèmes principaux ne sont pas toujours connus avec précision. Même lorsqu'un résultat est énoncé correctement, l'examineur a parfois de mauvaises surprises lorsqu'il demande les définitions des concepts auxquels cet énoncé fait appel : définition d'un équivalent, d'un $o(\|h\|)$.

↔ Beaucoup de candidats commettent des erreurs de logique, la plus courante étant la confusion entre condition nécessaire et condition suffisante.

↔ Des calculs d'intégrales, même simples, prennent parfois un temps très important (notamment les calculs d'intégrales trigonométriques), ce qui traduit le fait que les candidats ne sont pas toujours à l'aise avec ce type de manipulations.

↔ - Les manipulations élémentaires sur les sommes et produits sont souvent sources de confusions. Peu de candidats semblent à l'aise avec ces manipulations (intervention de sommes, repérage d'indices muets, etc.) Certains candidats n'hésitent pas à intervertir somme et produit, sans se poser de question.

↔ Le jury a constaté des difficultés importantes chez beaucoup de candidats dans la manipulation d'inégalités élémentaires :

↔ Inégalité triangulaire mal utilisée. Par exemple, on a vu à plusieurs reprises des inégalités du type : $|a - b| \leq |a| - |b|$.

- ↪ Manipulation de valeurs absolues. Nombre de candidats ne savent pas réécrire une inégalité de la forme $|A| \leq B$ ou $|A| \geq B$ sans utiliser de valeur absolue.
- ↪ Preuve qu'une fonction est bornée (un candidat sur deux n'utilise pas de valeur absolue et ne prouve qu'une majoration).
- ↪ Beaucoup de candidats ont semblé éprouver des difficultés à dériver des fonctions du type $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$, où f est une fonction continue. Certains cherchent à appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

Algèbre

- ↪ Un certain nombre de candidats pensent que tout espace est un espace vectoriel.
- ↪ Concernant la définition du produit scalaire dans un espace préhilbertien réel, beaucoup de candidats oublient de préciser que l'application doit être à valeurs réelles.
- ↪ La justification de l'identification des coefficients résultant de l'égalité de deux polynômes pose souci à certains candidats.
- ↪ Concernant le critère de diagonalisabilité, le jury a parfois vu l'énoncé : « si le polynôme caractéristique d'une matrice est scindé, alors cette matrice est diagonalisable », ou encore « si le déterminant d'une matrice carrée est non nulle, alors cette matrice est diagonalisable ».

Géométrie

- ↪ Peu de candidats pensent à guider leur intuition à l'aide d'un dessin, ce qui est en général un très bon réflexe lorsque l'on débute un exercice.
- ↪ Beaucoup de candidats ont le réflexe de passer par un calcul alors qu'un raisonnement géométrique élémentaire permettrait parfois de répondre rapidement et efficacement aux questions posées.
- ↪ Le produit vectoriel est rarement bien défini : soit la définition est incomplète (les candidats définissent plutôt un vecteur normal au plan engendré par les deux vecteurs).

Probabilités

- ↪ On déplore beaucoup de confusions dans les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev. L'interprétation probabiliste de ces inégalités est souvent méconnue.
- ↪ La loi faible des grands nombres est rarement connue.
- ↪ Des confusions régulières entre indépendance et incompatibilité d'événements.
- ↪ Certains candidats n'hésitent pas à écrire l'intersection de probabilités.
- ↪ Le jury a déploré à plusieurs reprises des confusions entre les différentes lois usuelles (par exemple la loi géométrique et la loi binomiale).