Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

Cette année, l'épreuve débutait par un exercice de probabilités qui consistait à étudier une chaîne de Markov à deux états (aucune connaissance sur les chaînes de Markov n'était nécessaire), puis était suivie d'un problème d'algèbre linéaire, divisé en trois parties largement indépendantes.

Nous tenons tout d'abord à signaler une dégradation importante du soin apporté aux copies, beaucoup s'apparentant plus à un brouillon qu'à une copie de concours, propre et correctement rédigée.

Enfin, le niveau moyen des candidats est particulièrement inquiétant, le raisonnement mathématique étant remplacé dans beaucoup de copies par une dissertation philosophique, voire une invocation ésotérique. La filière PT n'a certes pas pour but de former des ingénieurs mathématiciens, mais on se demande comment certains étudiants peuvent avoir quelque compétence scientifique (en physique, mécanique, SI en général) avec un tel manque de maîtrise de l'outil mathématique.

Exercice de probabilités

Cet exercice étudiait une chaîne de Markov homogène à deux états. Nous considérions donc une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ à valeur dans $\{0, 1\}$ dont les lois conditionnelles de X_{n+1} sachant X_n étaient données (en fonction de deux paramètres).

1. Dans un premier temps, il fallait trouver une relation de récurrence d'ordre un pour les probabilités $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$, résoudre explicitement cette relation puis trouver la limite de p_n quand $n \to +\infty$ (ce qui montre la convergence en loi de la chaîne vers la probabilité invariante quelle que soit la loi initiale).

   Il suffisait d'appliquer la formule des probabilités totales (pour un système d'événements composé de deux événements seulement) pour obtenir cette relation. Malheureusement, cette formule n'est pas énoncée correctement dans beaucoup de copies.

   Que dire également du raisonnement par récurrence qu'une grande majorité de candidats veut utiliser alors qu'il est inutile. Ils démontrent donc directement la formule demandée sans s'apercevoir qu'ils n'utilisent pas l'hypothèse de récurrence. Ceci est déjà très désagréable, mais bien moins que ceux pour qui le raisonnement par récurrence consiste à remplacer n par $n+1$ dans l'hypothèse de récurrence et ainsi affirmer que la propriété est vraie à l'ordre suivant.

Obtenir l'expression générale des termes d'une suite arithmt́ico-géométrique est ensuite d'une difficulté extrème pour beaucoup de candidats !

Enfin, pour qu'une suite de la forme ρ^n tende vers 0, il ne suffit pas d'avoir $\rho < 1$! De même, on peut s'interroger lorque l'on obtient une probabilité qui tend vers $+\infty$.

2. Nous nous placions ensuite sous la loi invariante et cherchions la loi conjointe du couple (X_1, X_2), et étudiions l'indépendance de ces variables.

   La notion de loi d'un couple de variables aléatoires n'est pas du tout mîtrisée. L'expression de l'espérance d'une variable de Bernoulli est en revanche connue, la variance beaucoup moins. Précisons qu'il faut s'inquiéter lorsque l'on obtient une variance nulle : cela signifie que la variable étudiée est constante.

   Parmi les trop rares candidats ayant obtenu la loi du couple, seule une poignée sont en mesure de calculer correctement la covariance des variables.

   Enfin, même les tous meilleurs candidats ne savent pas discuter selon les valeurs des paramètres. Ils obtiennent une expression (non identiquement nulle) pour la covariance et affirment qu'elle est non nulle alors que celle-ci s'annule pour certaines valeurs des paramètres.

   Une erreur classique que l'on a souvent retrouvée : la covariance nulle n'implique pas l'indépendance des variables.

3. Il fallait ensuite montrer que partant de $X_1 = 1$, la loi du temps pour obtenir un zéro dans la suite suivait une loi géométrique.

   La plupart des candidats arguent d'une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, alors qu'aucune variable de ce type n'apparait dans l'énoncé du problème. Le paramètre de la loi géométrique est d'ailleurs souvent un p qui n'est défini nulle part. De là à imaginer que certains candidats répètent des phrases toutes faites sans vraiment les comprendre ...

4. Nous étudiions dans cette question la loi du minimum et du maximum de deux variables aléatoires géométriques indépendantes.

   L'expression de la fonction génératrice d'une loi géométrique est souvent connue (il aurait été de bon ton de la retrouver par le calcul, mais cette absence n'a pas été pénalisée), celle de la somme de deux variables indépendantes beaucoup moins. Dans une rédaction correcte, il est bien de préciser que l'on obtient le produit des deux fonctions génératrices du fait de l'indépendance.

La manipulation des fonctions de répartition pour obtenir celle du minimum ou du maximum est en revanche très délicate pour la plupart des candidats avec beaucoup d'approximations, d'erreurs de calcul dans les séries géométriques ... Finalement, très peu de candidats ont obtenu les lois correctes au final.

5. Cette dernière question utilisait les résultats précédents sous un énoncé de modélisation. Elle n'a été abordée que par de très rares candidats et n'a quasiment jamais abouti.

Problème d'algèbre linéaire

Le but du problème était de donner une démonstration du théorème min-max de Courant-Fisher puis du théorème d'entrelacement de Cauchy. Ces résultats généraux n'étaient abordés que dans la troisième partie, les deux premières parties étudiant des propriétés plus simples mais préparant à la manipulation des objets de la dernière, plus théorique.

Partie I

Nous considérions ici deux matrices symétriques réelles d'ordre trois explicites (l'une n'admettant que des valeurs propres simples, l'autre ayant une valeur propre double) et étudiions le comportement asymtotique du rapport :

$$\frac{\langle A^{n+1}x, x\rangle}{\langle A^n x, x\rangle}.$$

1. Pour la matrice à valeurs propres simples, il fallait dans un premier temps diagonaliser explicitement celle-ci en précisant la base orthonormée de diagonalisation. Précisons que, contrairement à ce que l'on a vu très souvent, une matrice diagonalisable ne l'est pas forcément dans une base orthonormée et que ceci est une propriété supplémentaire des matrices symétriques.

   La diagonalisation est ensuite mieux (mais pas toujours) maîtrisée. L'utilisation de la règle de Sarrus n'est cependant pas la meilleure méthode pour calculer un polynôme caractéristique : on se retrouve avec un polynôme de degré trois dont on ne sait que faire. Beaucoup de candidats oublient ensuite de normaliser les vecteurs obtenus.

Venait ensuite **LA** question du problème qui conditionnait toute la suite : obtenir les expressions de $\langle x, x\rangle$ et de $\langle A^n x, x\rangle$ quand le vecteur x était décomposé dans la base orthonormée de vecteurs propres. Cela a définitivement disqualifié tous les candidats qui élèvent des vecteurs au carré, ceux pour qui le produit scalaire donne tout sauf un scalaire et ceux qui ne connaissent pas l'expression de la norme ou du produit scalaire dans une b.o.n. Cela représente environ la moitié des candidats ! Et encore avons nous laissé le bénéfice du doute à ceux qui font comme s'ils travaillaient dans la base canonique sans aucune justification, sans être vraiment surs qu'ils comprenaient ce qu'ils faisaient.

Montrer que la quantité $\langle A^n x, x\rangle$ ne s'annule plus à partir d'un certain rang n'a été correctement traitée que par très peu de candidats. Et encore, même ceux qui avaient les bonnes idées oublient de discuter selon les valeurs des paramètres : la suite est effectivement équivalente à $\lambda_3^n\, x_3$ sauf quand x_3 est nul. Précisons que montrer que la suite ne s'annule pas pour les entiers pairs ne répond pas à la question.

La limite du rapport est ensuite beaucoup mieux traitée (du moins par ceux qui avaient obtenu l'expression correcte).

2. Pour éviter des calculs fastidieux, nous demandions de vérifier que la seconde matrice était diagonalisable dans la même base que la précédente. La plupart des candidats reprennent cependant tous les calculs depuis le début : calcul du polynôme caractéristique, calcul des sous-espaces propres. .. certains ne choisissant pas les bons vecteurs pour le sous-espace de dimension deux. Bref une approche très algorithmique des problèmes de mathématiques où on applique la recette que l'on a apprise. D'autres calculent $P^{-1}\, C\, P$, où P est la matrice de passage obtenue précédemment (sans s'apercevoir que $P^{-1} = P^T$ car la base est orthonormée) avec en général beaucoup d'erreurs de calcul. Tout ceci démontre un manque total de recul chez quasiment tous les candidats.

Partie II

Cette partie reprenait les résultats obtenus dans la première partie dans un cadre général. Elle ne pouvait être abordée que par ceux qui avaient obtenu une expression correcte des produits scalaires mentionnés plus haut. Elle a été globalement bien traitée par ceux-ci même si la rédaction aurait pu être bien souvent grandement améliorée, en précisant notamment où l'hypothèse $\langle x, e_d \rangle \neq 0$ intervenait et en montrant que le dénominateur ne s'annulait pas (cela ne semble poser problème à personne).

Exhiber un contre-exemple pour lequel la convergence n'avait pas lieu a été en revanche beaucoup plus difficile. Là aussi, il est désagréable de voir apparaitre des termes pouvant s'annuler au dénominateur.

Partie III

Nous abordions ici le théorème du min-max, à proprement parler.

Il fallait tout d'abord montrer que, si les valeurs propres sont rangées par valeurs croissantes, et si F_k est le sous-espace engendré par les vecteurs propres $(e_k, \ldots, e_d)$, alors

$$\min_{x \in F_k \setminus \{0\}} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

La minoration a en général été bien traitée (toujours par ceux qui avaient la bonne expression pour les produits scalaires). Le fait que le min soit atteint pour $x = e_k$ un peu moins, beaucoup disant que le minimum est atteint lorsque toutes les valeurs propres sont égales.

Il fallait montrer ensuite que tout sous-espace de dimension k intersectait F_k. Un simple argument de dimension donne le résultat, mais cela a donné lieu à beaucoup de digressions pas toujours très justes. La suite, plus délicate, n'a été que très peu traitée. Il faut tout de même souligner qu'un certain nombre de bons candidats ont obtenu le résultat min-max souhaité.

Nous revenions ensuite à des questions plus faciles, abordables même par les candidats qui avaient échoué précédemment. La plupart ont effectivement abordé ces questions, parfois avec succès. Il faut là encore regretter que le cours (expression du produit scalaire lorsque les vecteurs sont exprimés comme matrice colonne) n'est pas connu parfaitement. Il y avait ensuite une petite subtilité : la matrice Q vérifiait effectivement $Q^T Q = I$, mais n'était pas carrée. Ce n'était donc pas une matrice orthogonale.

Il fallait ensuite donner la dimension d'un sous-espace engendré par une famille de vecteurs. Il suffisait de dire que cette famille était orthogonale donc libre. Mais bien peu de candidats ont traité correctement cette question.

La fin de cette partie utilisait les résultats précédents pour démontrer le théorème d'entrelacement de Cauchy. Il s'agissait d'une question délicate qui n'a quasiment jamais été abordée.