

# INFORMATIQUE ET MODELISATION DES SYSTEMES PHYSIQUES

Durée 4 h

## PRESENTATION DU SUJET

Le sujet s'intéressait à l'étude des déformations élastiques d'une plaque sous contrainte. L'étude prenait pour support, en raison de leur notoriété, les démonstrations que fit, à la fin du XVIII siècle, dans toute l'Europe, le physicien et musicien, Ernst Florence Friedrich Chladni. Ce sujet qui peut paraître ancien reste très actuel puisque nombre de méthodes de déplacement micros ou nanoparticules utilisent les vibrations sonores des surfaces de dépôt.

(Exemple au CEA : <http://www.cea.fr/presse/Pages/actualites-communiques/sciences-de-la-matiere/Utiliser-son-pour-deplacer-des-particules.aspx>).

Le sujet se décomposait en plusieurs parties distinctes :

- Une proposition de modèle physique (Q1 → 6)  
Le modèle suggéré est basé sur une équation de D'Alembert. Cette partie permet d'aborder les questions classiques : propriétés de ce type d'onde, analyse dimensionnelle, recherche des solutions d'ondes stationnaires.
- L'analyse de méthodes numériques permettant de résoudre une équation différentielle d'une seule variable (Q7 → 11).  
Les méthodes d'Euler à gauche et à droite, la méthode des trapèzes et la méthode de Runge-Kutta y sont présentées. Les problèmes de discrétisation, et de stabilité sont évoqués.
- La discrétisation spatiale de la plaque vibrante (Q12 → 15)  
L'analyse permet de résoudre l'équation spatiale  $\Delta U = -\lambda'U$  et est l'occasion après la discrétisation de mettre à profit les méthodes de l'algèbre linéaire.
- La mise en œuvre d'une méthode numérique de recherche de valeurs propres (Q16 → 18).  
L'implémentation de plusieurs fonctions simples y sera requise.
- Une brève analyse des résultats graphiques obtenus (Q19 → 20)
- Une recherche d'une valeur particulière dans la distribution obtenue (Q21 → 22).  
Elle offrait au candidat l'opportunité de mettre en valeur ces compétences sur l'appréciation de différentes méthodes, et évoquait brièvement la notion de complexité asymptotique.
- Une dernière partie (Q21 → 22) confrontait les résultats de la simulation basée sur le modèle proposé aux réalités expérimentales et permettait de conclure à l'inadéquation de la proposition. La gamme de fréquences propres d'une plaque permettait de contrôler l'adéquation d'autres propositions.

## COMMENTAIRES DES MEMBRES DU JURY SUR LA PRODUCTION DES CANDIDATS

Comme chacun ne l'ignore pas les trains qui arrivent à l'heure ne font pas les titres du 20h. La liste qui suit évoque les erreurs constatées sur nombre de copies et est fournie afin de faciliter la préparation des futurs candidats au concours. Elle ne liste pas les excellentes copies que le jury a eu le plaisir de lire.

### Modèle physique

- 1) L'équation de D'Alembert est souvent mentionnée mais ses propriétés le sont rarement. Beaucoup d'équations de diffusion sont évoquées comme analogues alors que la corde de Melde, l'équation de l'électromagnétisme ou celle du puits de potentiel étaient à la disposition des préparateurs.

- 2) Des réponses souvent correctes mais trop rarement justifiées. L'art du lancer de pièces est plus apprécié que celui de la démonstration
- 3) De trop fréquentes confusions entre les principes de l'analyse dimensionnelle et ceux de la vérification d'homogénéité ont été constatées. Il n'a jamais été demandé de vérifier qu'une vitesse était homogène à une vitesse contrairement à ce que la rédaction de nombreuses copies a évoqué.
- 4) Correctement faite par la plupart des candidats ayant traité correctement la question précédente.
- 5) De nombreux résultats sont exacts, mais nous constatons un fréquent chaos dans les démarches d'approches.

### **Modes de vibration**

- 6) La démarche de séparation des dépendances temporelles et spatiales d'une onde stationnaire est mal maîtrisée. Si la substitution de la forme de solution est faite correctement, pour la plupart l'introduction de la séparation des termes est rarement menée complètement. Beaucoup trop de candidats semblent ignorer que les conditions aux limites du problème définissent les solutions acceptables.  
La dernière partie de la question a été globalement bien traitée.

### **Simulation numérique**

- 7) Le principe de la méthode d'Euler est généralement connu, même si sa présentation est de qualité extrêmement variable. La mise en forme matricielle est correcte dans la quasi-totalité des copies plus ou moins bien présentée.  
Le passage à l'équation aux différences avec l'introduction de la discrétisation temporelle a été plus malheureux et doit être revu.
- 8) La plupart des résolutions s'orientent dans la bonne direction, mais restent approximatives dans la formulation. Le calcul matriciel est bien peu rigoureux. La modification du code proposé a été correcte pour tous ceux qui ont obtenu la forme matricielle requise. L'appréciation de la pertinence a produit un florilège de réponses souvent vagues.
- 9) La réalisation du code permettant l'affichage a été l'occasion d'une grande diversité d'écritures, sans doute supérieure à celle prévue par les concepteurs de la librairie matplotlib. Les productions sont rarement complètement correctes mais rarement complètement fausses...  
Les commentaires requis ont fait preuve de la même variété. Assez peu de réponses convaincantes pour cette question pourtant simple, c'est trop souvent une sorte de description exhaustive des graphes (déphasage  $h/h'$  ..). La divergence n'est constatée que pour la moitié des candidats qui se sont exprimés.  
La dernière partie fut correctement traitée par ceux qui avaient avec justesse la question précédente, cela n'a pas empêché les autres de produire des « modifications » très fantaisistes dont certaines associées à la modification de l'algorithme en contradiction flagrante avec la formulation de la question.
- 10) À côté d'une (petite) moitié de trapèzes, on trouve aussi beaucoup de rectangles, l'image précédente s'est avérée persistante dans nombre d'esprits. Les expressions données sont souvent remises au bon endroit. La partie commentaire fut juste pour la plupart, bien que le jury ait souvent dû lire de longs paragraphes pour identifier la phrase clé. Concision et précision sont appréciées.
- 11) Le traitement fut ici rare, et les solutions correctes ont rarement été expliquées. Réponses sur l'ordre aléatoires, certains mentionnent la stabilité sur un temps long (voire parfois infini !)

## Discretisation spatiale

Cette partie est de manière générale assez peu et mal traitée.

- 12) Les calculs souvent mal faits, la remarque sur le pas est rarement correcte.
- 13) Trop de candidats n'ont aucune difficulté à dériver des fonctions discrètes. Les hypothèses minimales requises pour des pratiques mathématiques anciennes (programme de première) sont oubliées. La logique fait ici souvent défaut.
- 14) Mieux traitée que la question précédente.  
L'affirmation semble toutefois remplacer avec valeur d'équivalence la nécessité d'une démonstration dans l'esprit d'un trop grand nombre
- 15) Les réponses furent ici peu nombreuses et rarement correctes

## Méthode de la puissance itérée / Représentation graphique

- 16) La question fut fréquemment abordée de façon correcte, au moins sur le principe. Une frange réduite de candidats oublie toutefois la valeur absolue présente dans la définition.
- 17) La déclaration de puissance itérée fut correcte pour la majorité.  
Sa modulation avec une exigence de boucle conditionnelle fut plus malheureuse, davantage d'erreurs ont été constatées, avec notamment un grand nombre de boucles for..  
La définition claire d'un invariant fait défaut pour une trop grande majorité. Beaucoup de réponses du type « invariant ça varie pas » et « variant ça varie », quelques réponses précises et intéressantes tout de même.
- 18) L'approche fut ici très confuse
- 19) Assez souvent l'idée est là mais la pratique donne lieu à des réalisations défailtantes.
- 20) Beaucoup de commentaires mais peu de pertinents (conditions aux limites, modes, symétries), malheureusement.

## Distribution des valeurs propres

- 21) La demande de la complexité asymptotique d'une recherche dans un tableau ordonné a rencontré un succès modéré.  
Guère plus de la moitié de réponses correctes, c'est un festival de choses improbables (pas mal de  $n^2$ , même du  $n^n$ ,  $n!$  etc...), la notation en  $O(n)$  est souvent oubliée.  
La déclaration de recherche brute est « en gros » bien traitée si le jury fait preuve de bienveillance.  
La complexité en  $O(\ln_2 n)$ , ou  $O(\ln n)$  était attendue. De trop nombreuses variations se sont exprimées :  $\sqrt{(n)}$ ,  $\frac{1}{n}$ ,  $\frac{n(n+1)}{2}$ ,  $\frac{n}{2}$ ...  
L'idée d'un algorithme de dichotomie est généralement comprise et c'est plus ou moins bien fait/explicite. Nous avons eu toutefois le regret de constater que dans 10% des copies l'algorithme de recherche par dichotomie d'un élément a été confondu avec celui de la **recherche du zéro** d'une fonction.
- 22) La première partie a été rarement traitée.  
La seconde a été valorisée quand elle a été abordée.  
Dans la continuité la complexité en  $O(n)$  fut évoquée de façon satisfaisante.  
La dernière question permettait de rappeler que la vitesse d'un code n'est pas uniquement définie par une complexité asymptotique mais aussi par la nature de sa réalisation. Ici le nombre de valeurs propres n'est pas élevé, le code numpy fait appel à des fonctions compilées et non interprétées, il est donc plus rapide.  
Pour mémoire, le sort de python est un algo TimSort, pour de faibles valeurs de  $n$  ( $n < 64$ ), il utilise un tri par insertion en  $O(n^2)$ .

## Confrontation modèle / expériences

Peu de candidats aborderont cette partie de synthèse, à l'exception de ceux qui viendront grapiller quelques points sur les dimensions. Seules les meilleures copies ont été ici pertinentes.

23) Beaucoup s'égarer dans d'inutiles calculs.

L'ordre de grandeur correct est rarement obtenu.

24) Les quelques réponses rencontrées furent très pertinentes. L'équation de diffusion une fois reconnue a des propriétés qui semblent mieux maîtrisées que celles de D'Alembert.

25) Les deux premières questions ont été moissonnées par des candidats opportunistes. Les parties suivantes n'ont permis de valoriser que les meilleures copies, de fines mais rares analyses ont été effectuées.

26) La dégénérescence des modes a été, là aussi, traitée correctement par une minorité.

## CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS

Nous conseillons aux futurs candidats de :

- Bien connaître les structures algorithmiques de base de branchement (for, while, if...else).
- S'entraîner un minimum à la manipulation des listes et des chaînes de caractères,
- Savoir respecter scrupuleusement le cahier des charges d'une fonction : "renvoyer" ou "retourner" n'est pas synonyme de "afficher à l'écran" !  
Ne pas confondre print et return.
- Prendre garde aux types des données et notamment, sous Python, à la différence entre entiers et flottants.
- Savoir analyser les résultats d'une simulation numérique, et notamment l'influence des différents paramètres.
- Maîtriser la notion de complexité asymptotique
- Connaître les algorithmes de tri de base et leurs complexités
- Ne pas ignorer la notion de preuve de programme et donc connaître la définition d'un invariant de boucle.