

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

Le sujet portait cette année sur le calcul de l'intégrale de Dirichlet. Il comportait un certain nombre de questions de cours, et des questions faciles, ce qui a permis aux candidats de répondre à un nombre important de questions.

A côté, d'autres questions étaient destinées à valoriser les candidats soigneux et rigoureux ; d'autres, plus difficiles, à départager les très bons candidats.

Nous souhaitons attirer l'attention des candidats sur le maniement des valeurs absolues, qui est souvent incorrect ou approximatif. L'utilité des valeurs absolues ne semble pas claire pour beaucoup, elles sont omises alors que c'est nécessaire, ou mises un peu au hasard dans les calculs.

D'autre part, il y a de plus en plus d'erreurs d'« écriture mathématique » : on voit trop souvent des intégrales qui n'ont pas d'élément différentiel, ou encore des limites (quand l'entier n tend vers l'infini par exemple) qui dépendent de n .

Enfin, l'utilisation inutile des raisonnements par récurrence est trop fréquente.

Les copies ne sont pas toutes bien présentées. Les correcteurs ont noté une nette dégradation de la présentation. Rares sont les copies correctement écrites. Au contraire, elles sont en général malpropres, raturées, écrites avec un stylo à bille qui bave, ou qui est à bout de course, donnant une écriture d'une pâleur extrême qui rend la correction quasiment impossible. Les lignes ne sont pas toujours respectées. Les lettres ne sont pas formées, la lecture devient extrêmement pénible, au point de se demander ce que le candidat veut dire.

Quant à l'orthographe ... Celle de la terminologie mathématique usuelle n'est pas toujours maîtrisée. Voici quelques échantillons trouvés dans les copies :

« un segement » ;

« on concidère » ;

« le théorème des agrosissement fini (sans aucun « s ») » ;

« le théorème de Rholle » ;

au choix : « la règle de d'Alembert, d'Allembert, d'Albert » ;

« le therme » ;

« anule » ;

« un interval » (pluriel : « des intervals »).

Tout ce qui tourne autour du verbe finir a été l'occasion de fautes multiples :

« le théorème des accroissements finit » ;

« le rayon de convergence est infinie » ;

« un intervalle finis » ; « la fonction admet des limites finit ».

Enfin, même le verbe être n'est pas épargné. Citons :

« ... sur sont intervalle de convergence » » ;

« c'est deux fonctions sont continues ».

Comme l'an passé, nous souhaitons faire quelques rappels de bon sens :

- i.* Il faut produire un raisonnement : recopier le résultat de la question n'est pas une preuve. Si le résultat attendu est donné dans l'énoncé, il faut prêter une attention particulière à la rédaction de la solution.
- ii.* Certains candidats manquent d'honnêteté intellectuelle en essayant de tromper le correcteur, effectuant un calcul manifestement faux mais en concluant avoir répondu. Par exemple, en partie II, question 1.a., avec des démonstrations par récurrence fausses.

Remarques particulières

Préambule

1. Peu de candidats ont justifié qu'une fonction continue sur un segment y est bornée. Les correcteurs ont trouvé dans les copies beaucoup de justifications fantaisistes, faisant appel au théorème des accroissements finis, au théorème de Rolle, disant que la fonction est lipschitzienne, ou, encore, un recopiage de l'énoncé, sans aucune justification à la clé.
Parmi le petit nombre de candidats ne parlant pas d'accroissements finis, les théorèmes parlent de fonction continue sur un intervalle ou sur un fermé. Le mot « segment » ou « fermé borné » est très peu présent.

Beaucoup de candidats omettent les valeurs absolues, et se contentent d'écrire une majoration de $|f'(t)|$.

2. Peu de candidats ont répondu correctement à cette question. Dans de très nombreuses copies, on trouve des inégalités mettant en jeu des nombres complexes ... D'autre part, peu de candidats semblent savoir que $|e^{ikt}| = 1$.
3. Si une majorité de candidats a traité correctement cette question. Toutefois, l'intégration par parties ne semble absolument pas maîtrisée par certains candidats. De même, le crochet converge vers 0 sans aucune preuve très souvent. On lit aussi « e^{ikt} est borné », sans précision sur le fait que l'on considère $k \mapsto e^{ikt}$ et non $t \mapsto e^{ikt}$.

Partie I

1. (a)
 - i.* Si cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats, nous rappelons qu'un résultat sans aucune justification n'a pas de valeur. On lit parfois que « l'intégrale est prolongeable par continuité », ou que « la fonction converge ».
 - ii.* Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Mais nous rappelons là encore qu'un résultat sans aucune justification n'a pas de valeur
 - iii.* Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Dans le reste des copies, le résultat est trop souvent donné sans aucune preuve.
- (b) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats, soit en utilisant directement la formule de trigonométrie donnant, pour tout réel t , l'expression

de $\sin^2 t$ en fonction de $\cos(2t)$, soit en passant en exponentielles complexes. Quelques candidats ont eu recours à une intégration par parties, qui permettait aussi d'obtenir la valeur de I_1 .

- (c) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats, là encore, soit en utilisant les formules de trigonométrie, soit en procédant à une intégration par parties.
- (d) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats. Quelques candidats veulent conclure avec une récurrence.
2. Cette question a été traitée par une grande partie des candidats. Toutefois, certains majorent le sinus par 1, et concluent sur la convergence des intégrales en affirmant que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ est une intégrale de Riemann convergente ...
- Des candidats appliquent le résultat avec $n = 1$ au lieu de $n = \frac{1}{2}$. Il est étonnant que certains candidats sachent répondre pour J_n , mais pas pour l'autre intégrale.
3. Cette question n'a été correctement et entièrement traitée que par peu de candidats. Si le prolongement par continuité de la fonction ϕ à gauche en $\frac{\pi}{2}$ n'a pas posé de problème, les correcteurs n'ont trouvé que peu de copies où l'étude de la continuité de ϕ à droite en zéro est faite. Beaucoup de candidats effectuent un développement limité à l'ordre 1, et soustraient ou additionnent des équivalents... ce qui n'est pas bien.
- En ce qui concerne le caractère C^1 , il est, très souvent omis. Quelques candidats déterminent la limite de ϕ' à gauche en $\frac{\pi}{2}$ (souvent avec une erreur de signe), mais n'étudient pas correctement la limite de ϕ' à droite en 0.
- Les très bonnes copies ont traité intégralement cette question, en complétant l'utilisation du théorème de la limite de la dérivée par une étude du taux d'accroissement à droite en 0 et à gauche en $\frac{\pi}{2}$.
4. Si cette question a été traitée par une grande partie des candidats, nous rappelons que, pour tout réel t , $\sin(2nt)$ est la partie imaginaire de l'exponentielle complexe e^{2int} , et non sa partie réelle. Pour certains candidats, il y a visiblement égalité entre les deux quantités.
5. (a) Cette question (classique) n'a pas été traitée correctement par tous les candidats : nous rappelons que pour effectuer l'intégration par parties, il fallait vérifier l'existence de la limite de $-\frac{\cos t}{t}$ en l'infini, et de l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$.
- Nous souhaitons insister, cette année encore, sur le fait que le critère de comparaison n'est valide que si les fonctions sont positives.**

Aussi, trop peu de candidats parlent de convergence absolue.

Enfin, il semble que, pour certains candidats, le sinus soit la dérivée de la valeur absolue du cosinus.

- (b) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats.
- (c) Si cette question a été traitée par une grande partie des candidats, les correcteurs ont trouvé, dans d'autres, des limites de J_n dépendant de n , voire égales à I_n .

Partie II

- 1. (a) Si cette question a été traitée par une grande partie des candidats, trop souvent la formule est donnée sans justification. Rappelons que lorsque la formule est dans l'énoncé, les correcteurs sont pointilleux sur la preuve. La relation de Chasles est souvent oubliée, et parfois remplacée par la linéarité de l'intégrale.

Certains candidats ont cru nécessaire d'effectuer une démonstration par récurrence, compliquée.

- (b) Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats. Déjà, beaucoup de candidats n'emploient pas la terminologie correcte, et/ou confondent la convergence de l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2} dt$, avec celle de la série de terme général $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2} dt$, ce qui n'est pas du tout la même chose. Ensuite, les valeurs absolues sont, le plus souvent, absentes. D'autres candidats donnent des équivalences complètement fausses entre $\frac{\cos t}{t^2}$ et $\frac{1}{t^2}$ en l'infini, ou affirment que lorsque l'entier k tend vers l'infini, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2} dt$ tend vers zéro, et concluent alors sur la convergence de la série de terme général $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2} dt$.

Les correcteurs ont aussi trouvé quelques perles mathématiques :

- « si $t > +\infty$, la série diverge » ;
- « la fonction cosinus est monotone et de signe constant (sur \mathbb{R}^+) » ;
- « l'intervalle diverge ».

En ce qui concerne la fin de la question, plus difficile, elle a été traitée dans les très bonnes copies.

- 2. (a) Cette question n'a pas été traitée correctement par tous les candidats. Déjà, tous n'appliquent pas correctement le critère de d'Alembert. Les correcteurs

ont trouvé dans les copies beaucoup d'équivalents fantaisistes, ainsi que des signes « moins » dans des résultats issus d'une valeur absolue. De nombreux candidats affirment aussi que le quotient tend vers 0 sans preuve (équivalent ou autre).

- (b) Cette question n'a pas été traitée correctement par tous les candidats. La formule est souvent donnée juste, mais pas vérifiée pour $t = 0$ (ou alors, en essayant de faire croire à un résultat non démontré), ou sans le rayon de convergence. Certains candidats pensent que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est développable en série entière.
- (c) Cette question a été traitée correctement par une grande partie des candidats. Mais encore une fois, la formule est donnée dans l'énoncé, et de nombreux candidats se contentent de la recopier. On attend au moins la notion d'intégration terme à terme, ou bien voir apparaître une primitive de la fonction $t \mapsto t^{2n}$.
3. (a) Cette question n'a pas été traitée correctement par tous les candidats. Déjà, beaucoup de candidats ont cru qu'il fallait donner le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel x , associe e^{ix} , ou e^x . D'autres ont donné des réponses complètement fantaisistes, des rayons de convergence valant 0, ou 1, voire des développements limités.
- (b) Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats. La manipulation de l'inégalité triangulaire est souvent mal maîtrisée : on lit souvent « $|\cos(nt)| \leq 1$ et donc $\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \cos(nt) dt \right| \leq \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots 1 dt \right|$ ». De nombreux candidats affirment que $|\operatorname{Re}(e^{-int})| \leq 1$ sans expliquer pourquoi. Certains candidats pensent enfin que le module de la partie réelle est égal à la partie réelle du module.
- (c) Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats.
- (d) Cette question a été traitée correctement par la majorité des candidats. Pour le reste, nous précisons que « $\pm \frac{1}{n}$ » n'est pas une réponse valable : il faut préciser quand le signe est positif ou négatif.
- (e) Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats. Quelques candidats ont bien pensé à sortir le $\frac{\pi}{2}$.
- (f) *i.* Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats. Ceux qui ont cherché à appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres ont parfois donné a priori et sans aucune justification correcte une

majoration de l'intégrande (pas de tentative de vérification). Peu ont noté que l'on intégrait sur un segment.

ii. Cette question a été traitée correctement par la majorité des candidats. Les correcteurs ont cependant trouvé des copies où les candidats ne semblent pas savoir dériver la fonction $t \mapsto e^{-a \cos t}$ par rapport à t .

iii. Cette question a été traitée correctement par la majorité des candidats.

iv. Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats, et a permis de départager les meilleurs copies. Certains candidats ont donné une limite qui dépend de a .

(g) Les candidats qui ont traité cette question l'ont fait avec beaucoup de soin.

(h) La première partie de cette question a été traitée par une grande partie des candidats, par contre, il n'en est pas de même de la fin.

En général, les candidats ayant donné la partie réelle en e . ont aussi bien répondu à cette question.

Pas mal de candidats ayant admis la valeur de $\lim_{a \rightarrow 0} F(a)$ ont grappillé des points.

(i) Cette question, qui a permis de départager les meilleurs candidats, n'a été que très peu traitée.