Rapport sur l'épreuve de Mathématiques B

Remarques générales

Le sujet de cette année était constitué d'un problème comprenant quelques questions de cours, un préliminaire comportant des questions utiles pour la suite puis du problème en lui même composé de cinq parties : une d'algèbre bilinéaire, trois parties liées de géométrie plane puis une dernière partie de géométrie dans l'espace.

Globalement, ce sujet plus orienté sur la géométrie plane a été mieux réussi que le sujet de géométrie dans l'espace de l'an dernier, mais les résultats restent très contrastés. Si certains candidats ne traitent avec succès que quelques rares questions, on trouve également quelques très bons candidats ayant traité avec succès la totalité du sujet. Les correcteurs constatent également une certaine hétérogénéité entre les différentes parties, certains candidats étant plus à l'aise sur l'algèbre (partie I) et d'autres sur la géométrie plane (partie II).

Les correcteurs s'étonnent également que de nombreux candidats ayant traité (avec plus ou moins de réussite) l'étude de la courbe n'essayent pas de la tracer. Il leur est signalé que dans un sujet dit de géométrie, le nombre de points accordé aux tracés des courbes est loin d'être négligeable.

La présentation des copies ne s'est pas améliorée cette année. Si heureusement, on compte peu de copies qui ressemblent à des torchons, par contre, moins d'un candidat sur deux $(47,7\%)$ $\boxed{\text{encadre}}$ les résultats de ses démonstrations, comme cela est pourtant demandé par l'énoncé... Pour cela, l'usage d'une règle est indispensable et il est conseillé d'utiliser une couleur différente de la couleur d'écriture..

Par ailleurs, il est rappelé (Cf. notice du concours) que ≪ les épreuves doivent être écrites à l'encre bleue et/ou noire, exception faite pour des schémas ou graphiques nécessitant une palette plus large de couleurs d'encre alors autorisées ≫ : 1 candidat sur 11 ne respecte pas cette consigne.... L'usage de stylos dont l'encre est susceptible de traverser le papier est également à éviter. Enfin, la couleur de l'encre utilisée doit être suffisamment foncée pour ne pas se confondre avec le quadrillage du papier.
Encore plus que les années précédentes, l'orthographe de très nombreuses copies laisse à désirer. Il serait souhaitable que des mots d'usage courant en mathématiques et dont la plupart figure dans l'énoncé soient correctement orthographiés et tout particulièrement : mathématiques, tangent(e), asymptote, cartésien(ne), colonne, dimension, terme, bilinéaire, lancer...
Rappelons que les noms propres s'écrivent avec une majuscule. De plus les correcteurs ont trouvé un nombre important de copies dans lesquelles les noms de (Jakob ou Jacques)

Bernoulli, (Jorgen) Gram et (Erhard) Schmidt ont été mal orthographiés.
On constate toujours que des règles élémentaires de la grammaire sont ignorées : accord genre et/ou nombre mais aussi conjugaison. Dans certaines copies, la situation est telle que les correcteurs ne parviennent pas à comprendre ce que les candidats essayent de dire et ceci est particulièrement vrai dans l'exemple demandé dans la question de cours 2.c.

On constate également de nombreuses confusion de vocabulaire et/ou de notions : dimension, cardinal et rang, tangente et asymptote, gradient et dérivée, droite, vecteur directeur et pente, résoudre et calculer, vecteur propre et sous-espace propre...
De plus, un peu plus d'attention vis à vis de la nature des objets qu'ils manipulent, devrait permettre aux candidats d'éviter de : dériver une courbe ou calculer sa valeur en un point, calculer le produit vectoriel de deux vecteurs du plan, confondre $=$, $\Leftrightarrow$ et $\sim$, $\subset$ et $\in$...

Les candidats sont également invités à respecter les notations de l'énoncé et à définir les notations qu'ils utilisent et qui n'y figurent pas.

Du côté de la rédaction, on constate que les quantificateurs sont régulièrement oubliés ou malmenés, ce qui conduit régulièrement à des confusions ou à des contresens. Il en est de même avec le choix de certaines notations : P', X, Y ou t pour désigner un polynôme, X pour désigner un scalaire quand on manipule des polynômes ou x, u pour désigner des espaces vectoriels ne sont pas des notations adaptées.

Enfin, nous avons noté de nombreuses tentatives d'arnaque du correcteur : les candidats commencent un raisonnement puis passent directement à la conclusion en faisant l'impasse sur l'argument décisif (question I 1 ou préliminaire 3), ils prétendent avoir vérifié que $\varphi(P, Q) = 0$ (question I 2d) alors que leurs sous-espaces propres sont faux ou encore soutiennent, fausse résolution de système à l'appui (question V 1), que les points D_1 et D_2 appartiennent à Γ_4... Ces pratiques laissent un sentiment très désagréable aux correcteurs et sont pénalisées.
D'autres remarques concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Face aux très nombreuses erreurs de calcul que l'on trouve dans les copies, les correcteurs souhaitent donner les conseils suivants aux candidats. Tout d'abord, les parenthèses ne sont pas optionnelles : $x + 2 \times y$ et $(x + 2) \times y$ ne donnent pas le même résultat. Ensuite, il est préférable d'écrire une ligne ou deux de plus pour avoir la bonne réponse plutôt que vouloir faire en une seule étape : remplacer, développer, réduire et ordonner... et de se tromper. Enfin, les candidats ont tout intérêt à simplifier leurs calculs comme $\dfrac{10}{8}$ ou $6x = 6y$. Signalons que le concepteur n'envisage pas de demander aux candidats de déterminer les sous-espaces propres d'une matrice pour des valeurs propres égales à $\dfrac{8+\sqrt{66}}{2}$ ou de placer dans un repère des points dont les coordonnées sont des polynômes en $\dfrac{18+\sqrt{234}}{24}$, il est donc conseillé aux candidats de ne pas insister avec ces valeurs et de reprendre leurs calculs. Par ailleurs, la factorisation de $6 - 18t + 12t^2$ par 6 évitait des calculs de discriminants trop compliqués.

Avant de passer au détail question par question, nous rappellons aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre...

Remarques particulières

Questions de cours.

Nombre de bonnes réponses	7	6	5	4	3	2	1	0
Pourcentage de candidats	10	$20,5$	$20,5$	19	$14,5$	$9,5$	4	2

Plus précisement :

La plupart des candidats ont reconnu la formule du binôme de Newton et connaissent la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ malgré quelques confusions avec le degré.

En ce qui concerne les variables aléatoires. Le loi binomiale est très souvent reconnue, il lui manque parfois un paramètre ; son espérance est un peu mieux connue que sa variance.

Nous attirons l'attention des candidats sur le fait qu'il existe des variables aléatoires qui ne représentent pas ≪ une répétition de n expériences de Bernoulli avec une probabilité de succès égale à t ≫. De nombreux candidats ont donné l'espérance et la variance avec p et q sans que l'on sache de quoi il s'agit. En ce qui concerne l'exemple demandé, on trouve des exemples classiques (lancers) ou plus originaux où il manque réguliément un argument d'indépendance mais aussi de nombreux ≪ exemples ≫ où le correcteur a envie d'écrire : ≪ $X_n = ???$ ≫ ou ≪ blabla ≫. Cet exemple permet aussi de constater de nombreuses confusions entre variables aléatoires, probabilités et événements.

Certains candidats confondent espaces vectoriels orthogonaux et orthogonal d'un espace vectoriel. Nombreux sont ceux qui veulent calculer le produit scalaire de deux espaces vectoriels. Certaines définitions (ou caractérisations) ne sont valables que dans le cas de la dimension finie (ou plus précisement que dans le cas où les espaces vectoriels considérés possèdent une base).

Enfin, on trouve de nombreuses définitions d'une surface de révolution pour lesquelles le tore n'en est pas une, le cylindre elliptique en est toujours une et le cylindre de révolution possède une infinité d'axes de révolution...

Préliminaires.

1. Le terme ≪ développer ≫ semble signifier ≪ additionner ≫ ou ≪ factoriser ≫ pour de nombreux candidats. Entre 1 et 2 % de candidats ne savent pas calculer le coefficient binomial.

2. C'est la méthode ≪ famille libre + bon nombre déléments ≫ qui a le plus de succès bien que le déterminant soit le plus efficace. Signalons que cette deuxième méthode ne nécessite pas de vérifier que la famille possède le bon nombre d'éléments. Rappelons qu'une famille de vecteurs possède un cardinal mais pas de dimension. On constate également des confusion entre famille et sous-espace vectoriel engendré par la famille.

3. La famille $(\mathcal{B}_{k,n}(X))_{0\leqslant k\leqslant n}$ n'est pas, contrairement à ce qu'ont affirmé de nombreux candidats (y compris dans la question précédente), échelonnée en degrés. Les tentatives de démonstration par récurrence ont presque toujours échoué soit parce que la propriété a été mal définie, soit parce que les candidas n'ont pas vu le lien entre les polynômes d'ordre n et ceux d'ordre $n+1$. Signalons qu'un système triangulaire n'est pas toujours inversible.

Partie I : Un produit scalaire.

1. (a) La définition n'est pas toujours connue. La plupart des candidats oublie de vérifier que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (et non dans $\mathbb{R}_2[X]$). Il est conseillé de démontrer proprement la bilinéarité (et non la linéarité) plutôt que d'utiliser des formules du type ≪ il est évident que ... par linéarité (de la somme et du produit) des polynômes ≫. Rares sont les candidats qui justifient que si φ linéaire à droite (ou à gauche) et symétrique alors φ est bilinéaire ; presque tous se contentent de l'affirmer (savent-il le justifier ?...). La propriété ≪ $\varphi(P,P)=0 \Leftrightarrow P=0$ ≫ a fait l'objet de nombreuses tentatives d'arnaque.

   (b) Le procédé de Gram-Schmidt n'a pas eu un succès extraordinaire. Parmi ceux qui l'ont tentée, il y a ceux qui se contentent de normer (et pas normaliser) les vecteurs, ceux qui oublient de le faire, ceux qui utilisent un autre produit scalaire pour normer les vecteurs, ceux qui ne l'appliquent pas à la bonne base. Si on rajoute ceux qui font des erreurs de calculs, il n'est pas resté beaucoup de bonnes réponses.

2. (a) Presque tous les candidats ont reconnu une matrice symétrique, malheureusement la moitié oublie de dire qu'elle est à coefficients réels. Signalons que le

théorème spectral dit qu'il existe une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}MQ$ soit diagonale et en aucun cas, contrairement à ce que semblent penser de nombreux candidats que toute matrice Q vérifiant $Q^{-1}MQ$ diagonale, est orthogonale (et pas orthonormée).

(b) Nombreux sont les candidats qui ne font pas cette question ou qui ne vont pas au delà du calcul du polynôme caractéristique. A ce sujet, signalons que deux matrices équivalentes (en ligne ou en colonne) n'ont pas toujours le même déterminant.

Il y a eu malheureusement peu de matrices orthogonales, la base choisie pour le sous-espace propre associé à la valeur propre double n'étant pas orthogonale. Pourtant de très nombreux candidats affirment que la matrice Q qu'ils proposent, est orthogonale : vérifier que c'est bien le cas, leur aurait pris bien peu de temps et permit de détecter leur erreur (et donc de gagner des points). On trouve des matrices supposées inversibles ayant une colonne nulle ou deux colonnes identiques.

Signalons une pratique fréquente dans la résolution des systèmes : les candidats ignorent ou suppriment l'une des équations. Cette pratique est certes justifiable (mais jamais justifiée) mais elle interdit aux candidats, hélas nombreux, qui se sont trompés dans le calcul des valeurs propres de se rendre compte de leur erreur. Il est donc conseillé aux candidats de résoudre soigneusement les systèmes par équivalence en exploitant toutes les équations.

Parmi les autres points de rédaction, signalons : les multiples notations pour les sous-espaces propres qui ne sont pas définies, les systèmes dont on ne sait pas d'où ils viennent, des vecteurs colonnes qui appartiennent à un sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs ligne, des produits qui n'existent pas...

(c) M et f ont certes les mêmes valeurs propres mais pas les mêmes sous-espaces propres, les vecteurs contenus dans chacun d'eux n'ayant pas la même nature. Il convient d'ailleurs d'utiliser des notations différentes. Le lien qui existe entre les sous-espaces propres de M et ceux de f ne semble pas connu et quand il l'est, les polynômes ont souvent été exprimés dans la base $(1, X, X^2)$.

(d) Question peu et souvent mal traitée, le produit scalaire φ n'étant pas utilisé.

3. Question peu traitée. Les candidats l'ont souvent comprise à l'envers. On y trouve néanmoins de très bonnes réponses.

Partie II : Une première courbe de Bézier dans le plan.

1. (a) Il est illusoire de vouloir trouver la représentation demandée sans utiliser la définition donnée en début de sujet. Assez souvent, des candidats ont décidé que cette courbe devait passer par les 4 points de contrôle. Trop nombreux sont les candidats qui ne disent pas où se trouve le paramètre ou qui le placent dans $\mathbb{R}$.

   (b) Lorsque la question précédente a été bien traitée, la réponse est correcte mais la formulation laisse souvent à désirer. Que des candidats ne trouvent rien d'autre à dire que « ce sont deux courbes paramétrées » devrait les conduire à se poser des questions sur leurs calculs dans la question 1.a.
   Le terme de restriction s'applique aux fonctions, pour leurs graphes, on parle d'inclusion.

2. (a) Les tableaux de variations doivent être justifiés (parfois, nous n'avons même pas le calcul des dérivées !) : la factorisation ou la recherche des racines des dérivées étaient ici attendues. Par ailleurs les expressions $6 - 6t - 12t^2$ et $(t+1)\left(t - \frac{1}{2}\right)$ ont les mêmes racines mais pas le même signe et ne sont certainement pas égales.

   (b) Quelques inversions entre horizontale et verticale. Le point stationnaire a de temps en temps deux tangentes.

   (c) Il n'est pas toujours clair que la tangente passe bien par le point A_0. On trouve aussi régulièrement une équation de la normale ainsi que des confusions avec les courbes d'équation $y = f(x)$.

   (d) On aimerait bien savoir pourquoi $p = 2$ et $q = 3$. Les candidats oublient souvent la tangente, il arrive qu'elle n'existe pas. On rappelle qu'une tangente est une droite et non un vecteur (directeur) ou une pente. Les illustrations graphiques ont été appréciées.

   (e) Les calculs sont souvent ceux attendus, bien qu'il manque parfois les limites de x_2 et y_2 en $+\infty$. La conclusion réguliènment fausse et l'illustration graphique inexistante.

3. On recherche trop souvent les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ qui, on le rappelle, sont de longueur une unité. Certains candidats ne graduent même pas les axes. L'unité de 6cm était certes uniquement conseillée et non imposée mais le choix d'une unité de 1cm, 5mm et même 2mm était déraisonnable.
   Cette question n'est pas suffisamment traitée y compris par les candidats ayant fait une étude convenable de la courbe. Il arrive que certaines courbes ne soient pas tangentes à leur tangente... Certains candidats semblent avoir des soucis pour placer des points dont une coordonnée est $\dfrac{7}{4}$ ou $\dfrac{5}{9}$.

Partie III : Un détour par le cas général

1. Les candidats ont intérêt à vérifier que ce qu'ils trouvent dans le cas général est conforme aux cas particuliers présents dans le sujet. Rappelons que X^0 est le polynôme constant égal à 1 et par conséquent que $\mathcal{B}_{0,n}(0) = 1$.

2. Question peu traitée. Elle nécessitait d'être soigneux dans le calcul des dérivées des polynômes $B_{k,n}$ et de leur évaluation en 0.

3. Cette question a été traitée aussi souvent que la dernière de la partie I mais a été sensiblement plus réussie.

Partie IV : Une deuxième courbe de Bézier.

1. (a) Souvent du $\ll$ blabla $\gg$ avant une proposition des coordonnées de C_1 miraculeuse.

   (b) Que des candidats puissent trouver la bonne réponse sans avoir les (bonnes) coordonnées de C_1 agace les correcteurs. Signalons qu'il existe une infinité de courbes passant par deux points fixés et ayant des tangentes fixées en ces points.

   (c) De nombreux candidats ne comprennent pas l'importance de $t \in [0;1]$ et construisent les tableaux sur $\mathbb{R}$ après avoir essayé de réduire l'intervalle d'étude et font une étude des branches infinies.

   (d) Tracé ayant eu plus de succès que celui de la partie II.

Partie V : Une surface de révolution.

1. Le résultat étant donné, tous les calculs doivent figurer sur la copie.

2. Des confusions entre gradient et dérivée donc entre tangente et normale... en sachant que dans l'espace, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné n'est pas une droite. Des confusions également entre représentation cartésienne et représentation paramétrique. Rappelons que la première nécessite deux équations.

3. La rédaction est régulièrement approximative. Nombreux sont ceux qui n'ont pas su exploiter $t \in [0, 1]$. Les illustrations graphiques ont été appréciées.