Rapport sur l'oral de Mathématiques I

Remarques générales

L'oral de mathématiques I consiste en une interrogation au tableau sans préparation, d'une durée de 30 minutes. L'exercice proposé au candidat porte sur l'ensemble du programme des deux années de préparation (algèbre, analyse, probabilités et géométrie), et est de difficulté graduelle, les premières questions étant toujours très abordables. Les exercices sont répartis de façon équilibrée entre algèbre, analyse, probabilités, géométrie. Lorsqu'un deuxième exercice est proposé, il porte sur une autre partie du programme.

Le but de cet oral est de juger et d'évaluer :

- ⇝ les connaissances ;
- ⇝ le savoir-faire technique et les capacités mathématiques ;
- ⇝ l'imagination et l'adaptabilité dans une situation un peu nouvelle des candidats.

Afin de juger de la performance de ceux-ci, l'examinateur prend en compte les éléments suivants (liste non exhaustive) :

- ⇝ la compréhension du problème posé ;
- ⇝ les initiatives prises (cerner les difficultés, les nommer, donner des directions pour les surmonter) ;
- ⇝ la précision du langage et la connaissance précise du cours, la capacité d'envisager différentes méthodes et de réfléchir à leurs utilisations ;
- ⇝ la justification précise de ce qui est fait ;
- ⇝ la maîtrise du raisonnement mathématique : la plupart des candidats sont incapables d'être précis pour énoncer une condition nécessaire et suffisante (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, caractérisation des endomorphismes trigonalisables à l'aide du polynôme caractéristique, par exemple). On a droit à un vague « si », et les investigations révèlent que les candidats ne savent même pas trop dans quel sens ils étaient en train de l'énoncer.
- ⇝ l'organisation et la présentation du tableau, la qualité de l'expression orale : nous rappelons que les sujets des phrases doivent être corrects pour que le raisonnement

soit rigoureux (les phrases qui commencent par « ça converge », finissent assez souvent mal quand on demande ce qu'est le « ça »).

Certains exercices sont longs, le jury n'attend pas nécessairement des candidats qu'ils finissent ceux-ci ; un candidat ayant très bien traité une proportion raisonnable d'un exercice long, peut ainsi avoir une note très satisfaisante.

En fin de planche d'oral, cinq minutes sont réservées à des questions de cours. Parmi les questions posées cette année - entre autres, et toujours très, très classiquement : l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la définition d'un produit scalaire, la formule de Taylor-Young (et son utilité), la formule de Taylor avec reste intégral, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction numérique de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, le théorème des accroissements finis, la caractérisation d'un endomorphisme diagonalisable à l'aide des dimensions des sous-espaces propres, définition et propriété de la trace, trace d'un projecteur, formules de Frenet (et utilité), suites adjacentes, définition et caractéristiques des isométries, caractérisation des projecteurs, caractérisation des symétries, matrices orthogonales, développements en série entière classiques, continuité/dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre, définition et interprétation des lois de probabilité usuelles, espérance et variance, énoncer la loi faible des grands nombres, donner les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, ...

Il est à noter que certains candidats semblent ne pas connaître le format de l'épreuve (ils sont surpris de devoir aller directement au tableau, veulent du papier brouillon ou aller chercher un stylo dans leur sac...).

Nous rappelons que, s'il s'agit, certes d'une interrogation orale, cela ne signifie pas absence de rédaction. Il faut donner de vrais sujets aux phrases, faire attention à l'orthographe, ne pas faire un usage intempestif de « il faut que ».

En outre, le vocabulaire manque parfois de précision ou n'est pas le bon : factoriser et regrouper ; déterminant et discriminant ; annuler le coefficient dominant d'un polynôme ; coefficient directeur et vecteur directeur, tangente et vecteur tangent et pente ... Connaître les noms complets des abréviations et notations (Vect, sup, ker, Arctan,...) est important.

Cette année, particulièrement, les examinateurs ont constaté une très grande hétérogénéité dans le niveau des candidats. Ils ont déploré (par ordre croissant de gravité) :

- ⇝ la fermeture à la discussion ;
- ⇝ l'utilisation de résultats incompris ;
- ⇝ l'incohérence ;
- ⇝ l'invention plus ou moins hasardeuse en direct ;
- ⇝ les énormes bêtises.

En regard, le jury a vu une majorité de bons candidats, sérieux, sachant présenter leurs résultats, même sans être brillants.

Remarques particulières

De façon générale, le cours est mal connu et très mal compris (un candidat sur deux). Cela se ressent dans beaucoup de situations où l'on demande de l'appliquer de façon directe. De façon plus précise :

$\rightsquigarrow$ **Algèbre :**

- Les études menant à la diagonalisation d'une matrice sont souvent bien faites, même s'il n'y a presque jamais de réactivité dans le cas où une matrice (ou un endomorphisme) ne possède qu'une seule valeur propre. Plus généralement, peu de candidats ont du recul sur la diagonalisibilité, et certaines « recettes », ne sont pas comprises.

- Peu de candidats connaissent l'équivalence entre bijectivité et injectivité d'une application linéaire en dimension finie, et savent correctement utiliser ce résultat.

- L'utilité du déterminant semble se limiter au calcul du polynôme caractéristique : peu de candidats pensent à l'utiliser pour montrer qu'un endomorphisme est bijectif, qu'une matrice est inversible, ou qu'une famille de n vecteurs (de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}^\star$) est une base.

- De façon très étonnante, beaucoup de candidats interrogés sur la définition d'une matrice symétrique sont incapables de faire autre chose que de donner un exemple sur une matrice 3×3. Le théorème spectral est très mal maîtrisé : cela va des oublis classiques de l'hypothèse précisant que la matrice est réelle, ou de la conclusion que les sous-espaces propres sont orthogonaux, à la confusion totale entre matrices symétriques et orthogonales (nous avons même eu : toute matrice symétrique est orthogonale).

- Exprimer la partie réelle d'une exponentielle complexe, de la forme $e^{a+i\,b}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, pose problème.

- Peu de candidats semblent savoir ce qu'est le caractère « défini » d'un produit scalaire. Et lorsqu'il faut démontrer qu'une forme bilinéaire, symétrique, est un produit scalaire, la preuve est, souvent, incomplète. Le terme « forme » semble ne rien signifier pour les candidats.

- Trop de candidats pensent qu'une projection est un endomorphisme orthogonal.

- D'une façon plus générale, il est rare d'avoir spontanément le cadre et les hypothèses : par exemple, la formule de projection est énoncée, mais presque jamais le fait qu'on se place dans un espace préhilbertien réel, dont on considère un sous-espace de dimension finie qu'on munit d'une base orthonormale. La définition d'une isométrie vectorielle est généralement placée, même après questions, dans un « $\mathbb{K}-$espace vectoriel », sans plus de précision.

- ◇ Les identités du parallèlogramme et de polarisation sont inconnues.

- ◇ Beaucoup de candidats ne semblent pas connaître la définition d'une réflexion.

⇝ **Analyse :**

- ◇ Les parenthèses ne sont pas des options : les candidats qui ne respectent pas les règles de parenthésage dans une expression mathématique sont pénalisés. C'est le strict minimum que l'on puisse attendre d'un candidat et le nombre de ceux qui manquent cruellement de rigueur sur ce point est très inquiétant. Signalons deux exemples (parmi des centaines) ; par exemple, un candidat va identifier

$$(1-x)^{-3} \quad \text{et} \quad 1+\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-3\times -4\times \ldots (k-3+1)\, x^k}{k\,!}$$

ou encore, pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$:

$$a+b\times c \quad \text{et} \quad (a+b)\times c$$

- ◇ De nombreux candidats effacent systématiquement leurs lignes de calcul dès que l'examinateur leur signale une erreur. Parfois, il aurait suffit de changer un signe, et les candidats perdent ainsi un temps précieux.

- ◇ Dans les calculs de limites, les candidats font régulièrement appel aux limites à gauche et à droite (sans raison... y compris parfois quand la fonction n'est pas définie d'un côté).

- ◇ Beaucoup de candidats ne savent pas reconnaître, pour t réel, l'expression $\cos^2 t - \sin^2 t$, ni, d'ailleurs, $2\,\sin t\,\cos t$.

  Ou encore, ils ne savent pas choisir entre $\sin t+2\,\sin(t)\,\cos t$, $(1+2\,\cos t)\,\sin t$, et $\sin t+\sin(2t)$ (on a d'ailleurs régulièrement du mal à obtenir les deux dernières expressions), pour calculer la valeur en un point, calculer les dérivées successives, faire un développement limité, trouver les racines ...

- ◇ Dans les développements limités, les termes de reste ont souvent tendance à disparaître, ou ne contiennent pas le bon terme (développement limité à l'ordre trois, au voisinage de zéro, de la fonction cosinus, notamment).

- ◇ Lorsque l'on demande le théorème de la bijection, il manque souvent l'hypothèse de continuité.

- ◇ La détermination des racines d'une expression tient plus souvent d'une série de tests que d'une étude rigoureuse. Le fait que « factoriser » puisse être une méthode efficace semble un fait inconnu de nombreux candidats (ce que nous avons déjà constaté à l'écrit).

  Factoriser est une compétence qui est loin d'être acquise par les candidats.
  Enfin, de nombreux candidats commencent la résolution d'une équation avec des équivalents, puis soudain passent à des implications. Interrogés, plusieurs ont dit que l'implication réciproque n'était pas utile !

- ◇ Les opérations avec les valeurs absolues sont parfois originales ...

- ◇ Parfois, un petit dessin clair (schéma, tableau de variations, ...) vaut mieux qu'un long discours confus ... même si cela ne dispense pas (dans la majorité des cas) d'une démonstration rigoureuse.

- ◇ Le jury a constaté beaucoup de confusions dans l'analyse des fonctions de plusieurs variables. En particulier, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 est souvent mal comprise et mal utilisée.

- ◇ La différence entre qualitatif et quantitatif est souvent peu claire (résultats sur les limites, les séries, etc ...).

- ◇ Les sommes de Riemann sont rarement connues.

- ◇ Des exercices sur les systèmes différentiels (même très simples), ne sont pas maîtrisés (la méthode paraît claire, mais les calculs ne suivent pas)

- ◇ Les développements en série entière usuels ne sont pas maîtrisés par un grand nombre de candidats. Nous rappelons que le domaine de convergence doit aussi être connu. Un candidat sur deux donne une réponse correcte (le développement en série entière, et le domaine de convergence), seuls 10 à 20 % des candidats donnent spontanément le domaine de convergence. En ce qui concerne la définition du rayon de convergence, elle n'est pas toujours connue.

- ◇ Lorsque l'on demande une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur un intervalle à préciser, celui-ci est systématiquement faux.

- ◇ Les conditions pour effectuer un changement de variables dans une intégrale impropre ne sont pas connues.

- ◇ La structure des solutions d'une équation différentielle linéaire, normalisée, homogène n'est pas connue, alors que c'est bien mieux pour le problème de Cauchy.

◇ Si les énoncés des théorèmes sur les intégrales à paramètres (continuité, dérivation) semblent souvent connus, leur application directe, y compris dans des cas très simples, est source de nombreuses confusions. En particulier, l'hypothèse de domination n'est pas souvent bien vérifiée.

⇝ **Géométrie :**

◇ Les paramétrisations de surfaces ou courbes de l'espace posent problème à beaucoup de candidats.

◇ Les courbes paramétrées du plan sont à peu près correctement étudiées, mais trop superficiellement, ce qui exclut de faire la partie « raisonnement », proposée en général dans la seconde partie de l'exercice. Nous en profitons pour rappeler que, en ce qui concerne la restriction de l'intervalle d'étude, l'ordre est important, et qu'il faut vérifier la compatibilité des opérations avec l'intervalle considéré (parité sur $[0, 2\pi]$, par exemple). Pour une courbe paramétrée, la périodicité de x et y n'entraîne pas une invariance de la courbe par translation (de vecteur inconnu par ailleurs). D'autre part, il manque (presque) systématiquement le repère dans les tracés de courbes paramétrées. Et lorsqu'on le demande, il n'est pas rare que les vecteurs proposés n'aient pas pour norme 1.

◇ Pythagore ne fait pas recette.

⇝ **Probablilités :**

◇ Les candidats sont globalement peu à l'aise avec les notions élémentaires de probabilités. Très souvent, on déplore une méconnaissance des formules usuelles (formule des probabilités totales, formule de Bayes, etc...), ou une incapacité à les appliquer, même dans des situations très simples.
Les questions de cours sont, quant à elles, souvent très très mal traitées. Pour commencer, les questions de cours sur l'union, l'intersection d'événements, permettent de mesurer assez nettement le degré de compréhension des candidats. La notion de système complet d'événements est très rarement assimilée de façon rigoureuse. Ensuite, les candidats ont du mal à définir proprement les lois usuelles. On rappelle qu'il faut donner :

✓ le ou les paramètres, avec les valeurs précises qu'ils peuvent prendre : par exemple, pour définir la loi géométrique de paramètre p, il faut rappeler que p est un réel de $]0, 1[$.

✓ L'ensemble des valeurs atteintes par une variable aléatoire X suivant la loi demandée : par exemple, une variable aléatoire de loi géométrique est à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$.

✓ La probabilité que X prenne l'une de ces valeurs fixées : par exemple, $P(X = n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$ pour une loi géométrique.

On attend ensuite, selon les cas, l'interprétation concrète de la loi, qu'il convient de dissocier de la définition mathématique : bien souvent, l'interprétation et la définition se mélangent de manière confuse, notamment pour les lois géométriques et binomiales. En outre, l'hypothèse d'indépendance des expériences successives, dans ces deux derniers cas, est souvent oubliée. Bien souvent encore, la loi binomiale revient pour les candidats à « modéliser n épreuves de Bernoulli », sans préciser qu'elle compte les succès.

◇ L'espérance est quasiment toujours une somme pour k allant de 0 à l'infini, de la forme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\, P(X = k)$$

sans que le candidat se soucie de l'univers image de la v.a. X.
Il est par ailleurs dommage que la formule du programme permettant, pour des v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'exprimer l'espérance comme

$$\sum_{k\geq 1} P(X \geq k)$$

soit ignorée en général.

◇ Les espérances des lois usuelles ne sont pas toujours connues, mais les candidats arrivent à les retrouver (plus ou moins vite). Les variances sont quant à elles plus rarement connues (et rarement retrouvées) ... La définition doit commencer par donner l'univers image, et il faut connaître la nature des objets écrits (en général n, p et k).

◇ On constate de savants mélanges entre addition, multiplication, intersection, réunion.

◇ Trouver les probabilités demandées est une chose ... savoir le justifier en est une autre ...

◇ Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev sont rarement énoncées de manière satisfaisante. Le contexte est souvent absent (X variable aléatoire discrète réelle, d'espérance ou de variance finie), l'hypothèse de positivité dans l'inégalité de Markov est omise, la nature du paramètre (a dans $P(X > a)$ par exemple) n'est presque jamais précisée.

◇ Très peu de candidats semblent connaître : la formule des probabilités totales, la formule des probabilités composées, ce qu'est une fonction de répartition, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la loi faible des grands nombres, le lien entre la série génératrice et l'espérance.

◇ La formule de transfert est souvent énoncée mécaniquement et hors contexte : on doit préciser que X est une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable A, f une application de A dans $\mathbb{R}$. L'existence de l'espérance de $f(X)$, assurée si et seulement si la série de terme général $f(x_n)\,P(X = x_n)$, étendue à l'ensemble des valeurs x_n que peut prendre X, est absolument convergente, n'est jamais énoncée. X est presque systématiquement restreinte à prendre ses valeurs dans $\mathbb{N}$.