

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

L'épreuve portait sur l'étude de projecteurs orthogonaux, dans l'espace, puis dans \mathbb{R}^n en général. Il s'agissait donc essentiellement d'un problème d'algèbre linéaire, mais comportant une petite partie de géométrie (formule de changement de base, étude d'une courbe paramétrée du plan).

Cette épreuve s'est révélée être assez classante, avec quelques (trop peu nombreux) candidats qui ont traité la quasi intégralité du sujet, et d'autres copies beaucoup plus faibles. En particulier, un bon tiers des candidats manipulent ces objets mathématiques sans réellement les maîtriser ni les comprendre. Ainsi, ce qu'ils écrivent ressemble de loin à des maths, mais cela n'a, bien souvent, aucun sens, avec des vecteurs égaux à des scalaires, des vecteurs élevés au carré ou encore des endomorphismes appliqués à des réels. Toutes les copies comportant de telles erreurs ont été lourdement sanctionnées.

Mentionnons les erreurs les plus fréquentes que nous avons rencontrées :

↔ Il n'y a pas qu'un seul vecteur propre associé à une valeur propre, mais tout un sous-espace vectoriel.

↔ $\langle x, a \rangle = \langle y, a \rangle$ n'implique pas $x = y$.

↔ Seuls les endomorphismes orthogonaux (le terme « isométrie » est peut-être plus approprié) vérifient $\langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle$.

↔ Les projecteurs orthogonaux ne sont pas des endomorphismes orthogonaux contrairement à ce que leur nom pourrait laisser penser.

Partie I

Cette partie étudiait une projection orthogonale particulière dans \mathbb{R}^3 et reprenait, si ce n'est des questions de cours, des propriétés que les candidats avaient certainement déjà vues dans leur cursus.

Les premières questions ont été relativement bien traitées (à part l'expression explicite du projecteur orthogonal).

La détermination des valeurs propres et des vecteurs propres a été plus délicate : bien souvent, des valeurs propres ont été trouvées (et fréquemment les bonnes), mais les candidats ne justifiaient pas qu'il n'y en avait pas d'autres, et très souvent également la valeur propre nulle était ommise. Regrettons que de nombreux candidats ne connaissent pas d'autre méthode pour obtenir les valeurs propres que de calculer la matrice associée et de dérouler la « méthode usuelle », alors que les questions précédentes permettaient de répondre à cette question en quelques lignes. Nous rappelons que ce concours a pour but de recruter de futurs ingénieurs capables d'utiliser à bon escient les outils théoriques à leur disposition et non des singes savants qui appliquent des recettes sans les comprendre.

Les conditions suffisantes, ou nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité sont en général bien connues. Cependant beaucoup de candidats parlent de multiplicité des valeurs propres, alors qu'ils n'ont pas calculé le polynôme caractéristique.

Partie II

Le but de cette partie était de trouver la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 vers une autre base orthonormée adaptée à la projection orthogonale sur un plan, puis de l'utiliser pour obtenir une expression simple qui servira dans la partie suivante des coordonnées de la projection orthogonales d'un vecteur.

Cette partie a été plutôt bien traitée et semble être maîtrisée par beaucoup de candidats.

Partie III

Nous étudions dans cette partie la courbe obtenue par projection orthogonale d'une hélice circulaire. Il s'agissait donc de l'étude d'une courbe paramétrée du plan.

La plupart des candidats savent ce qu'est un point régulier et étudient sans problème les variations des fonctions. En revanche, la réduction de l'intervalle d'étude a posé de nombreux problèmes (certains candidats ne regardent que la parité des fonctions, ou encore la fonction $t \mapsto 2t - \cos t$ devient subitement périodique!) et les symétries/translations sont rarement bien décrites.

Précisons également que tracer une courbe ne se réduit pas à calculer quelques points

particuliers et à les relier par une courbe plus ou moins lisse. Au moins, quelques tangentes sont attendues pour pouvoir obtenir une allure raisonnable de la courbe. Au final, nous n'avons vu que très peu de courbes ressemblant à celle attendue.

Partie IV

Cette dernière partie, plus théorique, donnaient des caractérisations des projecteurs orthogonaux, i.e. les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs contractants et les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs auto-adjoints.

La première question de cette partie a clairement montré une totale incapacité de beaucoup des candidats à manipuler des inégalités, avec des raisonnements du style $x \geq y$, $x \geq 0$ alors $y \geq 0$. A moins que tous les coups soient bons pour arriver au résultat demandé... Cette remarque est également valable pour l'inégalité demandée à la question 3.

Démontrer qu'une application est un endomorphisme ne pose en général aucun problème, et la démonstration que pour un projecteur, l'image et le noyau sont en somme directe est également assez bien traitée.

En revanche, la manipulation des sommes et des produits scalaires dans la question 4 a là encore montré un manque flagrant de compréhension des objets manipulés.

La fin du problème a été traitée par trop peu de candidats pour permettre des remarques significatives.