Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Le sujet présente diverses méthodes de calcul du nombre transcendant π. Dans la première partie, on retrouve les intégrales de Wallis, que l'on calcule sans utiliser de relation de récurrence. Dans la seconde partie, on fait apparaître l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$, qui donne le calcul de l'intégrale de la fonction sinus cardinal $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur la demi-droite des réels positifs. Les relations permettant d'exprimer π en fonction de la somme d'une série permettent son calcul approché.

Nous avons les remarques suivantes :

1. Au début du sujet, se trouvaient de nombreuses questions, de cours ou bien très simples. A peine 10% des candidats sont capables d'énoncer correctement le théorème de Dirichlet. Une proportion inquiétante de candidats ne semble rien avoir compris aux séries de Fourier et à la périodicité. Beaucoup de points ont été perdus sur ces questions.

2. En ce qui concerne les intégrales de Wallis, nous avons constaté qu'un nombre élevé de candidats ne maîtrisent pas les formules de trigonométrie de base ($\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$), confondent parité et imparité ; nous rappelons que les « démonstrations graphiques » où le candidat « voit sur le dessin que cela marche » ne peuvent donner lieu à comptabilisation de points.

3. La notion de dérivabilité n'est pas maîtrisée par beaucoup de candidats, qui affirment d'emblée que la fonction $t \mapsto |\sin t|$ est dérivable.

4. 10% des candidats semblent avoir compris ce qu'est une intégrale à paramètres. Pour les autres, la notion d'existence de l'intégrale est confondue avec celle de la fonction que l'on intègre. Il en est de même pour la continuité et la dérivabilité des intégrales

à paramètres. Beaucoup de candidats écrivent des majorations soit sans aucune valeur absolue, alors que des sinus ou cosinus sont en jeu, soit, pire, par des quantités négatives.

5. Les majorations ne sont quasiment jamais justifiées.

6. Donner le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ semble avoir posé de gros problèmes à un nombre élevé de candidats. Nous avons trouvé, comme réponses $\ll \mathbb{R} \setminus \{1\} \gg$, $\ll \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \gg$, $\ll \mathbb{R} \setminus \{0\} \gg$, SIC.

7. Nous avons trouvé un nombre élevé de copies ≪ vides ≫, où le candidat se contente de mettre (très proprement en général) les numéros des questions avec, à côté, des blancs. Ces candidats ayant fait l'effort de venir passer l'épreuve, nous ne leur avons pas mis la note ≪ zéro ≫. Nous avons aussi trouvé un nombre élevé de copies où tout ce qui est traité est faux. Là encore, ces candidats ayant fait l'effort de rendre une copie, nous ne leur avons pas mis la note ≪ zéro ≫.

Remarques particulières

Partie I

1. (a) Cette question a été correctement traitée par environ 40% des candidats.
   (b) Cette question n'a été que peu souvent correctement traitée ; il manque toujours une hypothèse : périodicité, caractère C^1 par morceaux.
   (c) Cette question n'a été correctement traitée que par ceux ayant traité la question 2.
   (d) Même remarque.
   (e) Cette question n'a pas toujours été bien traitée. Beaucoup de candidats se trompent en proposantde faire un ≪ changement d'indices en posant $n = 2\,n'+1$, ce qui est incorrect, ou bien ne justifient rien, le $(-1)^n$ apparaît comme par magie.
2. (a) Cette question n'a été que rarement correctement traitée. Un nombre élevé de candidats affirme que ≪ cela se voit sur un dessin ≫, ou bien que ≪ la fonction *sinus* présente une symétrie ou une ≪ parité en $\frac{\pi}{2}$ ≫.

   Beaucoup de candidats écrivent des relations d'égalité entre $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\, dt$ et $\left[\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\sin^{2n-1} t}{2\,n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$.
   Quelques candidats ont reconnu les intégrales de Wallis. Certains ont redémontré intégralement les relations de récurrence, lorsque cela était fait correctement et que la réponse à la question posée était correcte, les points ont bien sûr été accordés.

(b) Cette question n'a été que rarement correctement traitée, dans la continuité de la précédente.

(c) Les formules d'Euler, relatives à l'exponentielle complexe, sont, en général, connues.

(d) La formule du binôme de Newton, est, en général, connue.

(e) Très peu de candidats remarquent qu'il faut distinguer le cas $k = 0$.

(f) Cette question n'a été que rarement correctement traitée. Outre les erreurs provenant de la question précédente, une partie des candidats n'a pas fait attention au fait que, dans la formule du binôme de Newton requise ici, la somme devait aller jusqu'à $2\,n$ et non n.

(g) Cette question a été très rarement traitée.

Partie II

1. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée. Nous avons trouvé beaucoup de réponses fausses et complètement aberrantes. Ainsi, des candidats partent de l'inégalité $\sin t \leq 1$ pour tout réel t, et en déduisent, toujours pour tout réel t, « $\dfrac{\sin t}{t} \leq \dfrac{1}{t} \leq 1$ » SIC.
   D'autres candidats écrivent que, « en zéro, $\sin t \sim t$ » et que, « donc, pour tout t, $\dfrac{\sin t}{t} \leq 1$ ».
2. Moins de la moitié des candidats ont traité correctement cette question. Le problème est que beaucoup confondent l'existence de l'intégrale avec celle de l'intégrande. Pour ϕ, le lien avec la question précédente n'a pas souvent été vu.
3. Une proportion faible de candidats a traité correctement cette question. Les intégrales à paramètres semblent poser de gros problèmes de compréhension aux candidats. Certains éprouvent le bseoin de remplir parfois plus d'une copie double (donc plus de 4 pages) pour traiter (souvent mal) cette question.
4. Cette question a été traitée par beaucoup de candidats. En général, les choses sont faites très correctement, ce qui a été apprécié par les correcteurs.
5. Cette question a été traitée par beaucoup de candidats.
6. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée.
7. Comme la précédente, cette question n'a pas souvent été correctement traitée.
8. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée. On trouve beaucoup de réponses aberrantes, un nombre important de candidats obtenant la valeur 0 comme réponse. Quelques candidats ayant obtenu cette réponse fausse ont expliqué sur leur copie pourquoi ce résultat était aberrant. Ces copies ont été valorisées.

Partie III

1. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée.
2. (a) Peu de candidats savent donner le bon domaine de définition. Cette question est une question de niveau lycée.

   (b) Cette question a été correctement traitée par les candidats ayant répondu correctement à la précédente. Trop souvent, les réponses ne sont pas justifiées.

   (c) Cette question a relativement souvent été traitée. Malheureusement, beaucoup de candidats se contentent, comme argument, de donner ≪ par théorème de cours ≫, sans énoncer ledit théorème, ni verifier que les hypothèses sont satisfaites.

   (d) Cette question a, en général, été traitée, et a, finalement permis aux candidats de gagner des points, beaucoup plus que celles du début de la première partie. La majorité des candidats semble maîtriser les séries entières. Il est à noter que certaines copies n'ont absolument pas abordé la partie I, ces copies commencent par la partie III, suivie de la II.

   (e) *i.* Cette question a, en général, été traitée.

   ii. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée.

   iii. Cette question n'a pas toujours été traitée.
3. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée.