

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

Le sujet était composé d'un problème d'algèbre linéaire (étudiant quelques propriétés des matrices stochastiques) et d'un exercice de géométrie (abordant une étude de cône), le problème d'algèbre linéaire étant lui même découpé en une question préliminaire et 3 parties indépendantes.

Question préliminaire

Nous demandions dans un premier temps de rappeler la définition (avec la formule explicite) du produit matriciel qu'il sera indispensable d'utiliser à la fin du problème. Malgré une quantité non négligeable de candidats qui ne sont toujours pas capable d'énoncer une formule (utile) issue directement du cours, cette question a été traitée de manière satisfaisante. Nous demandions ensuite de démontrer quelques résultats élémentaires sur les suites de matrices (convergence d'une somme et d'un produit). Certains candidats ont utilisé comme argument les résultats usuels de convergence pour les suites réelles (sans s'apercevoir qu'ils manipulaient des matrices), ce qui montre bien qu'ils ne sont pas du tout préparés à sortir du cadre réel (éventuellement \mathbb{R}^d). Plus surprenant, beaucoup de candidats ayant énoncé correctement la formule du produit matriciel dans la question précédente oublient subitement cette formule et utilisent ici le produit terme à terme!

Partie I

Cette partie étudiait une matrice stochastique de taille 3×3 fixée pour laquelle il fallait calculer la limite des itérées successives via une diagonalisation (dans \mathbb{C}). Il fallait ensuite relier la limite obtenue avec le vecteur propre (à gauche) associé à la valeur propre 1.

La diagonalisation d'une telle matrice semble maîtrisée par la majorité des candidats. En

revanche, la limite d'une suite de nombres complexes l'est beaucoup moins et cette question a donné lieu à nombre d'arguments farfelus.

La question 4 de cette partie était délicate. Nous attendions tout d'abord des candidats qu'ils justifient la formule

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P D^n P^{-1} = P \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} D^n \right) P^{-1}$$

en utilisant la question préliminaire par exemple, ce que bien peu de candidats ont fait. Le calcul des matrices P et P^{-1} était inextricable, il fallait utiliser la forme très particulière de la limite pour ne pas partir dans des calculs insurmontables.

Même si cette question était difficile pour ce concours, nous regrettons globalement que quasiment tous les candidats

- i.* se lancent dans les calculs sans réflexion préalable
- ii.* se découragent rapidement après quelques lignes de calcul.

En règle générale, nous ne demanderons jamais des calculs de plusieurs pages sans qu'une autre méthode soit envisageable; quelques calculs simples mais néanmoins un peu longs peuvent parfois apparaître et la persévérance est alors de mise. Par exemple, la dernière question de cette partie nécessitait la résolution d'un système de trois équations linéaires ce qui semble assez élémentaire. Que d'erreurs et que de calculs non aboutis!

Nous ne redirons jamais assez l'importance de mener à bien des calculs. Les mathématiques commencent par du calcul. L'expérience montre que ceux qui savent mener correctement à bien des calculs sont beaucoup plus à l'aise, ensuite, avec l'abstraction. Nous mettrons donc, régulièrement, à l'avenir, des questions comportant des calculs dans nos sujets.

Partie II

On s'intéressait ici à une matrice stochastique de taille 2×2 , à l'expression de ses puissances successives, puis à la limite de la suite ainsi construite (à l'aide de polynômes). Les calculs standards sur les polynômes ne posent pas de problèmes, mais la question 2.a, qui était juste une application directe de la formule de la division euclidienne, a donné lieu à des démonstrations vaseuses qui relèvent plus de la malhonnêteté intellectuelle que des mathématiques, et où l'âge du capitaine aurait probablement permis de conclure plus rapidement.

Dans cette partie, nous soulignons également que la justification rigoureuse de la convergence vers 0 d'une suite géométrique fait souvent défaut.

Le but de cette partie était de montrer que les valeurs propres d'une matrice stochastique générale étaient toutes de module inférieur à 1. Il fallait connaître la formule du produit matriciel (toute méconnaissance de cette formule était rédhibitoire pour aborder de manière satisfaisante la plupart des questions de cette partie). Soulignons également une manipulation anarchique des valeurs absolues (égalité en lieu et place de l'inégalité triangulaire, mauvaises majorations...) et beaucoup d'erreurs de raisonnement avec les

inégalités (du style « $a < c, b < c$ donc $a < b$ »). Cette partie a été globalement très mal traitée, l'abstraction semblant inaccessible à beaucoup trop de candidats.

Exercice de géométrie

Cet exercice étudiait l'équation d'un cône avec des paramètres. On s'intéressait, dans un premier temps, aux cas de dégénérescence (union de deux plans); là, beaucoup d'erreurs ont été commises : confusion entre plans et droites, entre union et intersection, voire obtention de surfaces surprenantes.

La suite étudiait la nature du cône dans les autres cas. Il était ici hors de question de réduire l'équation du cône, une simple discussion sur le signe des valeurs propres de la matrice symétrique associée à la forme quadratique suffisait. Les meilleurs candidats ont été en mesure d'effectuer cette discussion mais la grande majorité préfère donner une réponse (souvent inappropriée) sans aucune justification. Nous demandions ensuite une condition nécessaire et suffisante pour que le cône soit de révolution. Là encore, les bons candidats ont réussi à obtenir des points, même si les notions de condition nécessaire, condition suffisante sont souvent floues et si beaucoup de raisonnements sont incomplets. La dernière question consistait à effectuer la réduction explicite de l'équation pour des valeurs fixées des paramètres et à donner les éléments caractéristiques du cône (en l'occurrence de révolution). Nous retrouvons ici le problème de mener à bien quelques calculs simples (que d'erreurs!). La question était volontairement peu précise (éléments caractéristiques du cône), car plusieurs réponses sont possibles (axe de révolution et droite génératrice, ou bien sommet et cercle générateur) mais bien peu de candidats donnent effectivement tous les éléments caractérisant un cône.