♦

EPREUVE DE MATHEMATIQUES C

♦

I. REMARQUES GENERALES

Le sujet traitait des intégrales et séries de Bertrand, et faisait donc appel aux connaissances des candidats sur les études de fonctions, suites, séries, intégrales, et calculs de limites.

Dans l'ensemble, le sujet a été bien compris par les candidats et le jury a apprécié leur capacité à entrer rapidement dans la logique de l'énoncé.

Par rapport à l'an passé, les candidats ont fait un effort très notable de présentation des copies, effort qui a été récompensé. On regrette, à côté, une tendance générale à écrire une avalanche d'arguments pour démontrer un résultat, le soin étant laissé au correcteur de piocher et trouver le bon, lorsque celui-ci y figure.

Par contre, un nombre non négligeable de copies témoigne toujours d'un manque de maîtrise en techniques classiques d'analyse de classe préparatoire (manipulation d'équivalents et limites, calculs d'intégrales, abus de récurrences où la démonstration de l'hérédité n'utilise pas l'hypothèse de récurrence).

Plus précisément :

1. Ce n'est pas parce qu'une fonction f est décroissante et/ou de limite nulle en $+\infty$ que $\int_e^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

2. Ce n'est pas parce qu'une fonction est continue qu'elle est dérivable.

3. $\frac{1}{t^2(\ln t)^2}$ n'est pas équivalent à $\frac{1}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$, et, de la même façon, $\frac{1}{t^h(\ln t)^\beta}$ n'est pas équivalent à $\frac{1}{t^h}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

4. $(\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2$ ne peut pas être égal à $\left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^2$.

5. Ce n'est pas parce qu'une suite est bornée qu'elle converge.

6. Un développement asymptotique avec des termes à l'ordre 1 en $\frac{1}{n}$ ne peut pas donner d'équivalent en $\frac{1}{n^2}$.

Une très grande importance a, comme les années précédentes, été accordée à la rigueur des raisonnements, et à la qualité de la présentation.

II. REMARQUES PARTICULIERES

Préliminaire

a. Beaucoup de candidats se sont contentés de l'illustration graphique, sans démontrer le résultat demandé. L'énoncé précisait pourtant que celle illustration graphique devait accompagner la démonstration.

b. Cette question a, en général, été bien traitée.

c. Cette question a aussi, en général, été bien traitée. Curieusement, quelques copies ayant correctement fait *a.* et *b*. n'ont pas traité le *c.*
Souvent, aussi, il manque l'argument fondamental selon lequel les sommes partielles, majorées, convergent, parce que la série est à termes positifs.

Première partie

1. La grande majorité des candidats a bien traité les questions *a*, *b*, *c*. Dans certaines copies, le graphe n'est pas donné, alors qu'il permettait aux candidats de gagner des points. On regrette aussi, dans beaucoup de copies, un manque de précision du tracé, lorsque le calcul de la valeur de la dérivée en e n'a pas été pris en compte.
En *d*, une grande partie des candidats a trouvé une primitive de la fonction. Souvent, les questions *e* et *f* sont donc correctement traitées, sauf dans quelques copies où, malgré une primitive correcte, les candidats affirment que l'intégrale diverge. Certains écrivent aussi que l'intégrale est égale à la série.

2. De même qu'en 1, la grande majorité des candidats a bien traité les questions *a*, *b*, *c*. Là encore, le graphe n'est pas toujours tracé.
En *d*, une grande partie des candidats démontre correctement la convergence de l'intégrale, mais un nombre non négligeable affirme que « $\dfrac{1}{t^2(\ln t)^2}$ est équivalent à $\dfrac{1}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$ » pour obtenir la convergence. D'autres cherchent vainement une primitive.
Enfin, Le critère de comparaison est parfois mal maîtrisé, certains utilisant la majoration de $g(t)$ par $\dfrac{1}{t^2}$ pour conclure sur la convergence de $\displaystyle\int_e^{+\infty} g(t)\,dt$ sans vérifier celle de $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

3. La question *a* a été traitée par la majorité des candidats. Par contre, beaucoup simplifient faussement $(\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2$ en $\left(\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right)^2$.
La question *b* a été traitée aussi par une grande partie des candidats.
Pour *c*, beaucoup tentent une démonstration par récurrence, mais très peu le font correctement.
Quelques très bonnes copies ont parfaitement traité cette question.
La question *d* a été correctement traitée par les candidats ayant répondu à la question *b*.
La question *e* a été traitée par la grande majorité des candidats, même si quelques uns arrivent à en déduire la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n}$.

4. Hormis certaines copies où certains calculent $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ et trouvent une limite finie, la question *a* a été traitée par une grande partie des candidats, ce qui n'est pas le cas de la question *b*, où certains passent par des équivalents ou limites pour étudier les variations de la suite.
La question *c* n'a pas toujours été bien traitée, Cf. les remarques en début de rapport.
Beaucoup de candidats démontrent sans problème la convergence de la série,
Par contre, la majorité des candidats a bien vu la somme télescopique et la manipule sans problème.
Beaucoup montrent que la suite $\left(\gamma_{n+1} - \gamma_n\right)$ converge vers zéro, et en déduisent la convergence de la série $\left(\sum_{n \geq 1} \left(\gamma_{n+1} - \gamma_n\right)\right)$, et se contentent, sans démonstration d'en déduire la convergence de la suite $\left(\gamma_n\right)$.
Un certain nombre de candidats a correctement traité le *d* et le *e*, mais on trouve, dans un nombre non négligeable de copies, des manipulations avec des « $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ », etc …
La question *f* n'a été correctement traitée que par un petit nombre de candidats, par contre, la question *g* a été, en général, bien traitée.

Deuxième partie

1. Environ 50% des candidats ont traité correctement cette question.

2. Cette question a, en général, été bien traitée, mais quelques candidats se sont lancés dans des études de fonctions compliquées alors qu'il suffisait d'utiliser la définition de la limite, d'autres ont utilisé des assertions complètement fausses mélangeant équivalents, croissances comparées, etc …
En outre, certains oublient la continuité de la fonction.

3. Cette question a été correctement traitée dans presque tous les cas. Toutefois, dans un nombre non négligeable de copies, le raisonnement est outrageusement long, biscornu, très difficile à suivre, et, parfois, pas toujours lisible …

4, 5. Hormis certains candidats qui oublient de mentionner la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha}\left(\ln t\right)^{\beta}}$, ces questions ont été correctement traitées dans presque tous les cas.

Troisième partie

a. Cette question n'a pas toujours été traitée par les candidats, qui ont préféré passer directement au *b*.
Certains candidats écrivent que v_n est équivalent à 0 lorsque *n* tend vers $+\infty$.
Lorsqu'elle est traitée, c'est bien fait dans la majorité des cas, hormis pour quelques copies où on trouve des calculs n'en finissant pas (2, voire 3 pages), excessivement compliqués et difficiles à suivre, alors que le calcul de cette limite n'était pas trop compliqué.

b. Cette question a été correctement traitée dans une grande partie des copies.

c. Cette question n’a été traitée que par peu de copies. Toutefois, un nombre non négligeable de candidats a bien compris le but de celle-ci, et esquissent un début de calcul et de réponse.

III. CONCLUSION

Globalement, cette épreuve a permis d’assurer une bonne sélection des candidats, dont un nombre significatif obtient des résultats parfaitement honorables. De plus, les correcteurs ont eu la satisfaction de corriger un nombre significatif de bonnes copies, et parfois d'excellentes, ayant remarquablement traité la totalité du problème.

Par rapport aux années passées, les correcteurs ont apprécié, de la part des candidats, une bonne compréhension du sujet dans sa globalité, et un réel effort de synthèse par rapport aux outils du programme.

Nous rappelons aux futurs candidats les conseils suivants :

1. Une bonne connaissance de la terminologie et des théorèmes de cours est indispensable. Les définitions et théorèmes doivent être donnés de façon précise.
2. L’utilisation d’un théorème nécessite le rappel de celui-ci (en ne se contentant pas de le nommer) et la vérification des hypothèses au moment de l’utilisation.
3. La rédaction doit être à la fois précise et concise, proportionnée à la difficulté des questions, en insistant sur les points clés. Les raisonnements trop longs et incompréhensibles doivent être bannis.
   Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.
4. La présentation matérielle ne doit pas être négligée. Les copies illisibles ne passent pas au bénéfice du doute.
5. La qualité du français et de l'orthographe est à surveiller. C'est un point de grande importance dans la vie professionnelle d'un ingénieur, appelé à rédiger des rapports scientifiques et techniques.
6. Il faut maîtriser les techniques basiques de calcul.
7. A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de « court-circuiter » la moindre étape. En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte, d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser les candidats qui ont pris le temps de bien rédiger.
8. Nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche, toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante. La confusion, l’ambiguïté, voire le manque d’honnêteté intellectuelle, doivent être bannis.

Les candidats ayant mis en pratique ces conseils ont obtenu des notes bien supérieures à la moyenne.

Nous espérons que ces remarques aideront les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours. La prise en compte de ces conseils tout au long de l'année de préparation leur permettra d'être fin prêts le jour du concours.