

## EPREUVE DE MATHEMATIQUE C

Durée : 4 heures

### REMARQUES GENERALES

Dans l'ensemble, le jury a apprécié le sérieux avec lequel la majeure partie des candidats a abordé l'épreuve de Mathématiques C. Cependant, le sujet semble avoir posé plus de difficultés que celui de l'année dernière. La première partie, en particulier, consacrée à quelques propriétés de la transformée de Laplace et qui faisait manier intégrales généralisées et séries n'a que très rarement été correctement traitée. Heureusement, les parties 2 et 3, peut-être plus classiques et utilisant à plusieurs reprises les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, ont donné lieu en général à un traitement nettement plus satisfaisant. La dernière partie était une application très concrète de la suite de Fibonacci qui n'a guère été abordée.

L'épreuve permettait à tous les candidats de pouvoir s'exprimer suivant leurs niveaux de connaissances. Les questions plus théoriques ont souvent été insuffisamment bien traitées, de façon superficielle, ou, au contraire résolues avec utilisation de (trop) nombreux arguments (ou théorèmes) montrant que le candidat ne voit souvent pas clairement les critères importants permettant d'obtenir le résultat escompté. La différence s'est faite principalement à ce niveau: ceux qui savaient rapidement et précisément répondre à ces questions plus théoriques avaient alors le temps de traiter toute l'épreuve, alors que ce n'était visiblement pas le cas pour les autres.

Les questions plus « calculatoires » ont souvent été traitées, mais on peut déplorer que souvent les calculs ne soient pas terminés, ce qui a pénalisé certains candidats notamment en les empêchant de faire des liens entre certaines questions.

L'épreuve était aussi construite de sorte que chaque partie comprenait des questions très faciles (calculs élémentaires comme une résolution d'équation du second degré, questions de cours fondamentales). Les candidats ont su presque tout le temps tirer partie de ces questions et les ont quasi-systématiquement traitées, ne se focalisant donc pas sur une ou plusieurs parties de l'épreuve, ce qui est plutôt positif.

La partie 4, qui demandait d'établir un résultat de processus itératif sur un cas concret simple, a énormément gêné les candidats qui n'ont quasiment jamais su répondre à cette question, ou alors ont simplement su dire que leurs calculs sur des valeurs de  $n$  petites permettaient de vérifier que la suite récurrente indiquée par  $n$  correspondait. Cela montre d'une part les difficultés que rencontrent les candidats à établir un raisonnement par récurrence « concret » et d'autre part, que lorsque les questions sortent de l'ordinaire (méthodes de calculs, applications de théorèmes) le candidat est perturbé.

Il est aussi assez curieux de remarquer qu'un nombre certain de candidats se lance systématiquement dans un raisonnement par récurrence (souvent inutile) dès qu'ils doivent démontrer une relation dépendant d'un entier positif.

Enfin, alors que nous avons noté l'an passé une amélioration dans la présentation et dans l'écriture des copies, nous déplorons cette année que plus d'un quart des copies soient difficilement lisibles, mal présentées, et comportant des fautes d'orthographe.

#### Plus précisément :

I. Une seule question de nature d'intégrale extrêmement classique semble pourtant avoir posé de nombreuses difficultés : on ne saurait trop insister sur le fait que les résultats de

comparaison de fonctions en vue de déduire une nature d'intégrale ne marchent que pour des intégrantes positives. De plus, on ne peut utiliser l'inégalité triangulaire sur une intégrale impropre tant qu'on n'a pas montré son existence. Par ailleurs, il se trouve que l'intégrale en question était à paramètre mais n'était jamais envisagée comme telle. Bien que la question portât uniquement sur la convergence (le paramètre étant fixé), certains ont pourtant voulu de force utiliser un des théorèmes du programme sur les intégrales à paramètre.

Encore plus délicats ont été les problèmes de natures de séries numériques. A nouveau, certains essayent de recourir à tout prix aux techniques qu'ils connaissent bien (comparaison à une série de Riemann, critère spécifique des séries alternées). Bien sûr, le réflexe est bon et peut souvent s'avérer payant mais il ne doit pas dispenser le candidat de regarder le terme général de la série et de prendre du recul. En effet, il est par exemple assez vain d'utiliser la comparaison à Riemann pour étudier la convergence d'une série géométrique. De plus, l'utilisation directe du critère des séries alternées était ici particulièrement mal adaptée (questions I.3.a.ii et I.3.b.iv) puisque l'hypothèse de décroissance de la valeur absolue du terme général n'était pas satisfaite, et il existait justement une question (I.3.b.ii) qui permettait de le constater. Ajoutons pour conclure que des affirmations du type « la série converge si  $n$  est impair, diverge si  $n$  est pair » pourraient laisser penser que le candidat n'a pas bien compris le cours.

Quelques autres carences sur le cours de classe préparatoire ont été parfois constatées : citons notamment la formule de Taylor-Young pour laquelle le reste peut être soit manquant soit faux ou les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 dont la résolution a donné lieu dans certaines copies à une malheureuse confusion avec les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

II. Plus généralement, il a été trop souvent constaté un manque de rigueur dans la manière de rédiger un problème d'analyse et en l'occurrence, certaines difficultés semblent venir de plus loin que la classe préparatoire. Tout ce qui a trait aux classes des fonctions est souvent mal compris. La question visant à montrer qu'une fonction était de classe  $C^\infty$  a été l'occasion de lire des phrases du type « la fonction existe donc est  $C^\infty$  », ou « continue donc  $C^\infty$  ». On remarque d'ailleurs que plusieurs n'hésitent pas à procéder à une intégration par parties en dérivant une fonction  $f$  alors même qu'il n'y a aucune hypothèse de dérivabilité sur cette fonction.

Enfin, on a noté à plusieurs reprises que des candidats ont dérivé la suite numérique  $(u_p)$  (question II.5.b) sans que l'on comprenne évidemment par rapport à quelle variable ils pouvaient bien dériver.

L'utilisation du principe de récurrence est dans de nombreuses copies trop massive : dans bien des cas, soit la récurrence écrite était fautive, soit elle était inutile (par exemple pour remonter sans le dire la formule de Leibniz), soit ce n'en était pas vraiment une (on montre l'hérédité sans utiliser l'hypothèse de récurrence !).

Enfin, le calcul algébrique de niveau lycée reste un outil essentiel dans un problème d'analyse et malheureusement, trop d'erreurs élémentaires se glissent et empêchent les candidats de mener au bout leur raisonnement. Par exemple, l'utilisation des valeurs absolues pose encore problème (on trouve des affirmations du type  $|a - b| \leq |a| - |b|$ ) de même que la gestion des inégalités (on multiplie un encadrement par  $(-1)^n$  sans regarder si les sens seront inversés). Les propriétés de calcul de la fonction exponentielle sont en général bien connues même si quelques uns persistent à penser que l'exponentielle d'un produit est le produit des exponentielles. Ajoutons un certain laisser-aller dans l'écriture des fractions : certains

candidats ont placé un signe moins devant la fraction  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  de manière trop ambiguë pour que l'on sache si ce signe se rapportait à l'ensemble ou uniquement au 1 du numérateur.

## REMARQUES PARTICULIERES

### Première partie

1. *a.* Bien dans l'ensemble, sauf parfois des erreurs de signe.
- b.* Bien traitée pour la majorité, bien que pour une partie de ceux là, les arguments sont redondants.
2. Un peu plus de la moitié des candidats a obtenu le bon résultat. Les autres donnent «  $F(s) = 0$  si  $t$  n'appartient pas à  $[a, b]$  » !
3. *a. i.* Ceux qui donnent l'existence de l'intégrale sont extrêmement rares. La relation de Chasles et le calcul sont bien réalisés pour la grande majorité des candidats. Notons également que certains d'entre eux démontrent le résultat par récurrence.
- ii.* La convergence de la série est souvent bien démontrée, soit par absolue convergence, soit par le « critère spécial des séries alternées ».
- iii.* Presque tous les candidats passent à la limite sans justifier l'existence des deux quantités considérées.
- b. i.* Cette question a presque toujours été réalisée, la plupart du temps correctement.
- ii.* Un nombre non négligeable de candidats trouvent que cette série converge. D'autres, astucieux - car tenant compte de la façon dont est posée la question - affirment qu'elle est divergente avec des arguments très douteux. Heureusement, une bonne moitié pense à comparer avec une série de référence divergente.
- iii.* Pas fait dans plus de la moitié des copies; sinon,  $1 - \gamma$  est souvent bien calculé, ce qui est moins le cas pour  $2 - \gamma$ . Il est curieux parfois d'observer que certains résultats dépendent de  $n$  !
- iv.* Cette question est souvent non traitée; lorsqu'elle l'est en effet, on sent que c'est à peu près compris mais souvent mal exprimé.
4. *a.* Bien traitée dans l'ensemble (et souvent) sauf pour ceux qui tentent une intégration par parties.
- b.* Soit cette question est non traitée (environ la moitié) soit elle est bien traitée (sauf dans une minorité de cas).
- c.* Quand la question est traitée (même si la précédente ne l'est pas), la valeur limite est souvent bien déterminée, mais quasiment jamais bien justifiée.

### Deuxième partie

1. Question bien traitée pour tout le monde (sauf un nombre très faible de candidats qui ont fait une erreur de calcul).
2. Très bien pour tout le monde. Certains démontrent par récurrence que les dérivées successives existent et sont continues.
3. Bien dans l'ensemble. Certains cependant commencent la somme à 1 et non à 0, et d'autres (plus nombreux), oublient la parenthèse dans l'exposant.
4. Bien traitée dans l'ensemble, soit par utilisation directe de la formule de Leibniz, soit par récurrence ....
5. *a.* Question presque toujours traitée. Pas mal d'erreurs de calcul cependant, notamment pour  $1 - u$ .

*b.* Bien pour ceux qui pensent à utiliser le résultat précédent. Mais environ un quart des candidats se lancent dans une démonstration par récurrence et affirme le résultat après dérivation des valeurs prises en 0 !

*c.* Beaucoup d'erreurs à cette question. Beaucoup ne connaissent même pas la forme de la solution de cette suite récurrente. Beaucoup également affirment que les racines du polynôme caractéristique associé sont les mêmes que celles de la question 1. Pour ceux qui donnent la bonne « forme » de la solution, le calcul des constantes est souvent mal fait, ou alors pas du tout.

6. Plus du tiers des candidats ne savent pas écrire de développement limité; beaucoup de résultats sont indépendants de  $x$  !

7. *a.* Question la plus traitée de l'énoncé (avec la II.1) et avec succès dans la grande majorité des cas.

*b.* Bien pour les deux tiers des candidats. L'autre tiers soit ne traite pas la question, soit donne un résultat faux.

*c.* Cette question a beaucoup perturbé les candidats, car même quand les résultats précédents étaient justes, les calculs n'étaient quasiment jamais suffisamment aboutis, ce a qui troublé les candidats (qui y voient alors une incohérence). Certains, visiblement, modifient alors en conséquence le résultat obtenu à la question II.5.c.

8. *a.* Bien à 50% ; pour le reste : série divergente ! Ou alors l'argument est juste de constater que  $2\lambda$  est inférieur à 1.

*b.* Bien fait dans plus de la moitié des cas, mais avec souvent des calculs non aboutis. Pour les autres, on trouve souvent des résultats constants!

### **Troisième partie**

1. *a.* Le résultat obtenu est souvent bon (pour les deux tiers), mais pas toujours démontré.

*b.* Bien pour le changement de variable; l'existence n'est pas toujours justifiée.

2. *a.* Les candidats reprennent souvent le calcul depuis le début (avec souvent les mêmes erreurs que dans la question II.5.c) et y passent visiblement beaucoup de temps. Seul environ un quart des candidats sait trouver la bonne valeur du rayon de convergence.

*b.* Cette question n'a été correctement traitée que par peu de candidats.

*c.* Très souvent fait (et bien) même si le reste n'a pas été réalisé.

### **Quatrième partie**

Beaucoup calculent les premières valeurs (avec des schémas à l'appui!) et constatent qu'elles sont solutions de la suite étudiée dans les parties précédentes. Moins de 3% des candidats font le bon raisonnement.

Une très grande importance a été accordée à la rigueur des raisonnements, et à la qualité de la présentation. Dans l'ensemble, et de façon regrettable, les copies sont moins bien présentées que l'an passé, alors que l'énoncé spécifie bien que cela sera pris en compte dans la notation. Les correcteurs en ont tenu compte. Les correcteurs déplorent aussi les candidats ouvertement malhonnêtes (dissimulant des erreurs de calcul ou de raisonnement pour laisser penser au correcteur qu'une question a été bien traitée, comme en I. 4. *b.*). Il est toujours préférable de reconnaître sur la copie qu'on n'a pas réussi à aller au bout d'une question plutôt que d'espérer faire illusion en semant la confusion et en encadrant le résultat final donné dans l'énoncé.

## CONCLUSION

Globalement, cette épreuve a permis d'assurer une bonne sélection des candidats, dont un nombre significatif obtient des résultats parfaitement honorables. De plus, les correcteurs ont eu la satisfaction de corriger un nombre significatif de bonnes copies, et parfois d'excellentes, ayant remarquablement traité la totalité du problème.

Pour le reste, les correcteurs ont eu le sentiment que les candidats savent « aller chercher » des points un peu partout dans le sujet, ce qui est plutôt positif. En revanche, et paradoxalement, ils ont déploré **leur manque de synthèse** par rapport au sujet, dans son ensemble. Il n'est en effet pas rare de trouver des copies dans lesquelles les candidats obtiennent une bonne réponse à une question en ne se rendant pas compte qu'elle est en contradiction avec un de leurs résultats antérieurs. De même, l'avancée dans le problème, ou les résultats intermédiaires ne font pas toujours réagir sur la compréhension de ce qui précède, comme cela devrait être le cas.

Nous rappelons aux futurs candidats les conseils suivants :

1. Une bonne connaissance de la terminologie et des théorèmes de cours est indispensable. Les définitions et théorèmes doivent être donnés de façon précise.
2. L'utilisation d'un théorème nécessite le rappel de celui-ci (en ne se contentant pas de le nommer) et la vérification des hypothèses au moment de l'utilisation.
3. La rédaction doit être à la fois précise et concise, proportionnée à la difficulté des questions, en insistant sur les points clés. Les raisonnements trop longs et incompréhensibles doivent être bannis.
4. Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.
5. La présentation matérielle ne doit pas être négligée. Les copies illisibles ne passent pas au bénéfice du doute.
6. La qualité du français et de l'orthographe est à surveiller. C'est un point de grande importance dans la vie professionnelle d'un ingénieur, appelé à rédiger des rapports scientifiques et techniques.
7. Il faut maîtriser les techniques fondamentales de calcul.
8. A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de « court-circuiter » la moindre étape. En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte, d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser les candidats qui ont pris le temps de bien rédiger.
9. Nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer qu'ils en admettent le résultat pour la suite. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle, doivent être bannis.

**Les candidats ayant mis en pratique ces conseils ont obtenu des notes bien supérieures à la moyenne.**

*Nous espérons que ces remarques aideront les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours. La prise en compte de ces conseils tout au long de l'année de préparation leur permettra d'être fin prêts le jour du concours.*