

◆

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES C

◆

### I. REMARQUES GENERALES

De façon générale, et dans l'ensemble, les copies sont d'un niveau satisfaisant et on constate qu'il y a un réel effort de présentation, de rédaction et une volonté d'énoncer avec soin les théorèmes.

Il y a encore trop de copies « bâclées », souvent dans les cas où le candidat ne sait pas faire grand chose. Cependant, il est étonnant de constater encore pour un petit nombre de candidats qui visiblement ont travaillé et connaissent les notions et techniques demandées, que la rédaction et la présentation restent encore secondaires, ce qui leur est très préjudiciable.

Enfin, et c'est peut-être le plus étonnant, alors que l'épreuve consistait à déterminer de différentes façons l'intégrale de Gauss, quelques candidats obtiennent des résultats différents suivant les parties, et d'autres ne sont pas perturbés quand ils obtiennent que la fonction de Gauss (qui « possède de nombreuses applications en mécanique » comme il l'est indiqué dans le sujet) est nulle! Cela dénote un manque de recul et de maturité scientifique sur une telle épreuve.

Dans l'ensemble, le sujet a été bien compris par les candidats et le jury a apprécié leur capacité à entrer rapidement dans la logique de l'énoncé et à savoir brasser de nombreuses notions du programme.

Cependant, il a également été constaté qu'un certain nombre de copies témoignait d'un manque de maîtrise en techniques classiques d'analyse de classe préparatoire (manipulation d'équivalents et limites, calculs d'intégrales), dans l'application des nouveaux théorèmes de mathématiques spéciales (intégrales dépendant d'un paramètre, séries entières) et plus étrangement dans l'utilisation de notions basiques remontant à la classe de terminale (règles de calculs de l'exponentielle, variations d'une fonction).

#### Plus précisément :

1. Techniques classiques d'analyse de classe préparatoire : le plus gros problème est le flou général constaté dans de nombreuses copies entre les propriétés asymptotiques et les propriétés globales. Il est tout à fait révélateur que certains aient cru qu'il suffisait de faire un développement limité en 0 pour montrer l'inégalité  $\ln(1+x) \leq x$  pour tout  $x$  de  $] -1, +\infty [$ . De même, lorsqu'il s'agissait de passer à la limite dans un encadrement, beaucoup n'ont pas hésité à remplacer les membres de gauche et droite par des équivalents en l'infini. Enfin, il est encore trop courant de rencontrer des limites quand  $n$  tend vers l'infini qui dépendent encore de  $n$ .

Les calculs du problème reposaient beaucoup sur les changements de variable dans les intégrales (simples ou doubles). Si en général la plupart des candidats parviennent au résultat, cela ne va pas sans quelques erreurs intermédiaires maladroites qui dénoncent un manque général de soin. Tout d'abord, très peu savent qu'il faut justifier un changement de variable en parlant de  $C^1$ -difféomorphisme, même lorsque celui-ci est donné dans l'énoncé. Il arrive par ailleurs que des candidats mélangent l'ancienne variable et la nouvelle dans l'intégrale pendant quelques lignes de calcul ou qu'ils oublient de changer les bornes après le changement de variable.

2. Application des théorèmes du programme de mathématiques spéciales : certaines questions nécessitaient une compréhension plus en profondeur du cours d'analyse et ont donc posé davantage de problèmes :

- Intégrales dépendant d'un paramètre : l'erreur la plus classique est de confondre le paramètre et la variable d'intégration, ce qui provoque inmanquablement des erreurs au moment de la domination de l'intégrande. Les copies restent souvent dans le vague sur les fonctions qu'ils considèrent (fonction de deux variables ou fonction d'une variable qui est le paramètre, la variable d'intégration étant fixée, ou l'inverse). Il faut d'ailleurs remarquer qu'ici, contrairement à l'énoncé du théorème dans le programme, la variable d'intégration était notée *theta*, ce qui

n'a pas empêché certains candidats de parler de la fonction qui, à  $t$  associe  $e^{-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}}$ . Enfin, il est dommage que beaucoup se jettent immédiatement sur la méthode de la restriction du paramètre à un segment même quand il est possible de dominer directement l'intégrande pour tous les paramètres.

- Fonctions développables en série entière : cette notion est dans l'ensemble très mal comprise par les candidats. Pour justifier qu'une fonction est développable en série entière, on trouve en général beaucoup d'arguments qui n'ont rien à voir, par exemple communément «  $C^1$  donc DES », ou encore « continue donc DES », et même « intégrable donc DES ». Il est par ailleurs regrettable de voir aussi souvent des développements en série entière de fonctions classiques comme l'exponentielle « orphelins », c'est-à-dire sans rayon de convergence.

3. Notions de niveau Terminale : il est important de signaler que dans un très grand nombre de copies, les règles de calcul de la fonction exponentielle ne sont pas bien connues. En particulier, il est commun de trouver que l'exponentielle d'un produit est le produit des exponentielles. Par ailleurs, on attend des candidats qu'ils dressent les tableaux de variations de fonctions élémentaires rapidement et en n'omettant pas les limites.

Les propriétés élémentaires de l'intégrale semblent mal assimilés : plusieurs candidats ont eu besoin d'introduire une primitive de la fonction qui à  $x$  associe  $e^{-x^2}$  pour calculer la dérivée de  $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ . De même, il n'est pas rare de voir confondues dans les démonstrations les notions de linéarité, croissance et positivité de l'intégrale.

Rappelons en conclusion qu'il est toujours bon, même en temps limité, de prendre le temps d'avoir un peu de recul sur le but du problème et les résultats demandés : quelques-uns ont par exemple cru qu'ils connaissaient une primitive de la fonction qui à  $x$  associe  $e^{-x^2}$  sans réaliser que cela aurait rendu tout le problème inutile.

Une très grande importance a été accordée à la rigueur des raisonnements, et à la qualité de la présentation. Dans l'ensemble, et de façon regrettable, les copies sont moins bien présentées que l'an passé, alors que l'énoncé spécifie bien que cela sera pris en compte dans la notation. Les correcteurs en ont tenu compte. Les correcteurs déplorent aussi les candidats ouvertement malhonnêtes (dissimulant des erreurs de calcul ou de raisonnement pour laisser penser au correcteur qu'une question a été bien traitée, comme en I. 4. b.). Il est toujours préférable de reconnaître sur la copie qu'on n'a pas réussi à aller au bout d'une question plutôt que d'espérer faire illusion en semant la confusion et en encadrant le résultat final donné dans l'énoncé.

## II. REMARQUES PARTICULIERES

### Première partie

1. La grande majorité des candidats a bien traité cette question, soit en étudiant la fonction différence, soit en utilisant la position des tangentes par rapport à une fonction concave. Cependant, un petit nombre de candidats ne démontrent rien (partent d'une inégalité en  $exp$  puis passent au  $ln$ ) où se trompent dans l'étude de la fonction.
2. Bien fait en général, en prenant soin de vérifier que l'on se trouve dans le domaine de validité de la question précédente.
3. Presque tous les candidats déduisent de la question précédente cette triple inégalité, mais très peu justifient la croissance de la fonction exponentielle (ou parlent de fonction « positive »), de la forme de l'intégrale et de l'existence de l'intégrale généralisée.
4. *a.* Calcul bien réalisé dans environ 70% des copies (erreur de signe pour presque toutes les autres), mais le changement de variable est rarement justifié (environ 10% des copies seulement).  
*b.* Plus de la moitié pensent au bon changement de variables (sans le justifier la plupart du temps) mais les autres soit le déduisent du résultat précédent (« de même »...) soit essaient d'utiliser le même changement de variable que précédemment et abandonnent le calcul.  
*c.* Presque toujours fait, même pour ceux qui n'ont pas répondu aux questions précédentes.
5. Le passage à la limite par encadrement est presque toujours réalisé; en revanche, l'écriture des équivalents et des passages à la limite n'est pas souvent très « propre ».

### Deuxième partie

1. Beaucoup de confusion pour cette question. Un développement en série entière n'est pas un développement limité. L'exponentielle n'est pas un polynôme.
2. *a.* Cette question (et la suivante) a un peu dérouté les candidats, mis à part ceux (peu nombreux) qui ont écrit directement le développement. Les autres donnent souvent des arguments insuffisants ou disent simplement qu'il suffit de faire le changement de variable.  
*b.* Comme précédemment, les arguments donnés sont souvent insuffisants.
3. Cette question a été correctement traitée dans presque tous les cas.
4. Les calculs sont très souvent correctement réalisés, bien que le terme  $a_0$  ait souvent été oublié. Cependant un nombre non négligeable de candidats écrivent  $a_n$  en fonction de  $x$ !
5. Réponses souvent correctes pour  $a_{2p}$ , mais rarement pour  $a_{2p+1}$  (soit le calcul est faux, soit le résultat est donné de nouveau par une relation de récurrence).
6. *a.* La plupart des candidats répondent correctement que la réponse est  $K$  ... mais beaucoup ont obtenu une mauvaise valeur de  $K$ .  
*b.* Même remarque que précédemment. Cependant, certains (un petit nombre) ne répondent pas à cette question bien qu'ils aient correctement répondu à la question précédente.

### Troisième partie

1. *a.* Environ les trois quarts des candidats citent le bon théorème et répondent très proprement à cette question. Certains précisent que l'on intègre sur un compact et dans ce cas n'utilisent pas le critère de domination. Le quart restant donnent des arguments insuffisants.

*b.* En général, tous ceux qui ont répondu correctement à la question précédente répondent également à cette question (quelques uns même répondent aux deux questions en même temps).

2. Moins de la moitié des candidats arrive au bout du calcul. Les plus honnêtes ne le terminent pas, les autres effectuent juste le changement de variable proposé et concluent.

3. *a.* Cette question est souvent correctement traitée même si certains candidats ne justifient pas suffisamment leur réponse.

*b.* La limite de  $g$  est presque toujours correctement faite. En revanche, un nombre significatif de candidats n'arrive pas à conclure proprement.

### Quatrième partie

1. La moitié des candidats environ obtient le bon résultat. Les autres soit obtiennent un résultat faux, soit n'arrivent pas au bout du calcul.

2. Pour un peu moins de la moitié des candidats la comparaison est immédiate puis le passage à la limite dans l'inégalité est correctement réalisé. Cependant, un nombre significatif de candidats tentent de refaire le calcul pour les deux autres intégrales et n'aboutissent pas.

### III. CONCLUSION

Globalement, cette épreuve a permis d'assurer une bonne sélection des candidats, dont un nombre significatif obtient des résultats parfaitement honorables. De plus, les correcteurs ont eu la satisfaction de corriger un nombre significatif de bonnes copies, et parfois d'excellentes, ayant remarquablement traité la totalité du problème.

Pour le reste, les correcteurs ont eu le sentiment que les candidats savent « aller chercher » des points un peu partout dans le sujet, ce qui est plutôt positif. En revanche - et paradoxalement - ils ont déploré **leur manque de synthèse** par rapport au sujet, dans son ensemble. Il n'est en effet pas rare de trouver des copies dans lesquelles les candidats obtiennent une bonne réponse à une question en ne se rendant pas compte qu'elle est en contradiction avec un de leurs résultats antérieurs. De même, l'avancée dans le problème, ou les résultats intermédiaires ne font pas toujours réagir sur la compréhension de ce qui précède, comme cela devrait être le cas.

Nous rappelons aux futurs candidats les conseils suivants :

1. Une bonne connaissance de la terminologie et des théorèmes de cours est indispensable. Les définitions et théorèmes doivent être donnés de façon précise.
2. L'utilisation d'un théorème nécessite le rappel de celui-ci (en ne se contentant pas de le nommer) et la vérification des hypothèses au moment de l'utilisation.
3. La rédaction doit être à la fois précise et concise, proportionnée à la difficulté des questions, en insistant sur les points clés. Les raisonnements trop longs et incompréhensibles doivent être bannis.  
Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.
4. La présentation matérielle ne doit pas être négligée. Les copies illisibles ne passent pas au bénéfice du doute.
5. La qualité du français et de l'orthographe est à surveiller. C'est un point de grande importance dans la vie professionnelle d'un ingénieur, appelé à rédiger des rapports scientifiques et techniques.
6. Il faut maîtriser les techniques basiques de calcul.
7. A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de « court-circuiter » la moindre étape. En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte, d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser les candidats qui ont pris le temps de bien rédiger.
8. Nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche, toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle, doivent être bannis.

**Les candidats ayant mis en pratique ces conseils ont obtenu des notes bien supérieures à la moyenne.**

*Nous espérons que ces remarques aideront les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours. La prise en compte de ces conseils tout au long de l'année de préparation leur permettra d'être fin prêts le jour du concours.*