BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans ce sujet, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Préliminaire : Questions de cours

1. Soit Σ une surface dont un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ est $(u,v) \mapsto M(u,v)$.
   Donner la définition d'un point régulier de Σ.
2. (a) Donner la définition d'une matrice carrée Q orthogonale.
   (b) Soit Q une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Quelles sont les natures possibles de l'endomorphisme canoniquement associé à Q ? Quels calculs peut-on effectuer pour distinguer ces différentes natures ? Préciser le lien entre le résultat des calculs et la nature. (On ne demande pas les éléments caractéristiques.)

Partie I : 2 surfaces

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la surface S d'équation cartésienne

$$z = (y - 2\sqrt{2}x)y$$

ainsi que la surface Σ de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{2}uv \\ y = (u+v)^2 \\ z = (u^2 - v^2)^2 \end{array}\right. \quad , \ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

On note $M(u,v)$ le point de Σ de paramètres u et v.

1. *A propos de S.*
   (a) Quelle est la nature de l'intersection de S avec un plan d'équation $y = \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$? Qu'en déduit-on pour S ?
   (b) Quelle est la nature de l'intersection de S avec un plan d'équation $x = \beta$, où $\beta \in \mathbb{R}$?
   (c) i. Quelle est la nature de l'intersection Λ_γ de S avec un plan d'équation $z = \gamma$, où $\gamma \in \mathbb{R}$? Distinguer différents cas suivant les valeurs de γ.
       ii. On note O_γ le point de coordonnées $(0,0,\gamma)$. Tracer les courbes Λ_γ dans le repère $(O_\gamma\,;\vec{i},\vec{j})$ pour $\gamma \in \{-2,0,1\}$.
       On pourra confondre les points O_γ et tracer les 3 courbes dans le même repère.
   (d) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S en un point M_0 de S de coordonnées (x_0,y_0,z_0). Cette équation ne devra pas dépendre de z_0.
   (e) Dans le cas particulier où M_0 est le point O, préciser la position relative de S et du plan tangent.
2. *Comparaison de S et Σ.*
   (a) Vérifier que $\Sigma \subset S$.
   (b) A-t-on $\Sigma = S$?
3. *A propos de Σ.*
   (a) Déterminer la nature géométrique de l'ensemble des points non réguliers de Σ.
   (b) Soit $M(u,v)$ un point régulier de Σ. Déterminer, en fonction des paramètres u et v, une équation cartésienne du plan tangent à Σ au point $M(u,v)$.

Partie II : Une famille de courbes

Soit a un réel distinct de 1 et -1. On note $A_a(u)$ le point $M(u, au)$ de Σ et Γ_a l'ensemble des points $A_a(u)$ lorsque u parcourt $\mathbb{R}^{+\star}$.

1. Donner une représentation paramétrique de Γ_a.
2. (a) Justifier que les vecteurs $\dfrac{d\overrightarrow{OA_a}}{du}(u)$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{OA_a}}{du^2}(u)$ engendrent un plan.

   On note alors $P_a(u)$ le plan passant par $A_a(u)$ et dirigé par les vecteurs $\dfrac{d\overrightarrow{OA_a}}{du}(u)$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{OA_a}}{du^2}(u)$.

   (b) Justifier, à l'aide de la partie I, l'existence de la normale à Σ en tout point $A_a(u)$ de Γ_a.

   (c) Déterminer a pour qu'en tout point $A_a(u)$ de Γ_a, la normale à Σ en $A_a(u)$ soit incluse dans $P_a(u)$.
   On donne, si nécessaire, $a^4 + 5a^3 + 6a^2 + 5a + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 + 4a + 1)$.

Partie III : Autour de Γ_{-2}

Dans cette partie, nous allons étudier le cas particulier $a = -2$ des courbes Γ_a définies dans la partie II.

1. On considère les vecteurs $\vec{w} = \dfrac{1}{3}\,\vec{i} + \dfrac{2}{3}\sqrt{2}\,\vec{j}$ et $\vec{u} = \vec{k}$.

   (a) Déterminer un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Ecrire la matrice de passage Q_1 de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et la matrice de passage Q_2 de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$.

   (c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice Q_2.

   (d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice Q_1.
2. Les coordonnées d'un point M dans le repère $(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ sont $(x,\ y,\ z)$ et ses coordonnées dans $(O\,;\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ sont $(x',\ y',\ z')$. Quelle relation existe-t-il entre la matrice Q_1 et les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$?
3. En déduire une représentation paramétrique de Γ_{-2} dans le repère $(O\,;\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$. Quelle est la nature de Γ_{-2} ?

On se place à nouveau dans le repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$, et on considère le système différentiel

$$S_{-2} : X' = B_{-2}\,X \text{ où } B_{-2} \text{ est la matrice } \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} & -\dfrac{2\sqrt{2}}{5} & 0 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{5} & \dfrac{1}{5} & 0 \\ -\dfrac{2}{5} & -\dfrac{4\sqrt{2}}{5} & 2 \end{pmatrix}$$

On appelle courbe intégrale du système différentiel S_{-2} toute courbe dont une représentation paramétrique est $t \in \mathbb{R} \mapsto X(t)$, où X est une solution de S_{-2}.

4. Soit x_0, y_0 et z_0, trois réels donnés. Que peut-on dire du nombre de solutions de S_{-2} vérifiant $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$?
5. (a) Justifier que B_{-2} est diagonalisable et la diagonaliser. On donnera une matrice diagonale D semblable à B_{-2}, la matrice de passage P retenue, ainsi que la relation liant B_{-2}, P et D (le calcul de P^{-1} n'est pas demandé).
   (b) En déduire les solutions de S_{-2}.
   (c) Démontrer que toutes les courbes intégrales de S_{-2} sont planes.
   (d) La courbe Γ_{-2} est-elle une courbe intégrale de S_{-2} ?
6. On suppose dans cette question uniquement que a est à nouveau un réel quelconque. Proposer une matrice B_a telle que Γ_a soit une courbe intégrale du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = B_a\,X$.

La surface S s'appelle paraboloïde hyperbolique ... ainsi que peuvent le suggérer les différentes courbes rencontrées dans ce problème. Elle ressemble à une selle de cheval. Quant au plan $P_a(u)$, il s'agit du plan osculateur à Γ_a au point $A(u)$.