Banque PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les deux premières parties du problème peuvent être traitées indépendamment des autres.

I. Première partie

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue par morceaux, et bornée.
Pour tout réel strictement positif s, on pose :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

1. *a*. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt$.

   b. Montrer la convergence de l'intégrale $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$.

2. On considère un réel τ, et deux réels strictement positifs a et b, tels que $a < b$. Dans cette question uniquement, on suppose que :

$$f(t) = \tau \text{ si } a \leq t \leq b \text{ , et } f(t) = 0 \text{ sinon}$$

Que vaut $F(s)$ dans ce cas ?

3. Dans cette question uniquement, on considère une suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et vérifiant, pour tout entier naturel n : $\tau_n \leq 1$.
On suppose aussi, dans cette question uniquement, que f est définie par :

$$f(t) = (-1)^n \tau_n \text{ si } n \leq t < n+1 \text{ pour tout entier naturel } n \text{, et } f(t) = 0 \text{ si } t<0 .$$

a. *i.* Soit N un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\int_0^N e^{-st} f(t)\,dt = \frac{1-e^{-s}}{s} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \tau_n e^{-sn}$$

ii. Montrer que la série de terme général $(-1)^n \tau_n e^{-sn}$ converge.

iii. En déduire que $F(s)$ peut s'écrire comme somme d'une série, dont on donnera l'expression du terme général en fonction du réel s.

b. On suppose, que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $\tau_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$, et : $\tau_0 = \tau_1 = 1$.

i. Etudier le signe de la différence $\tau_{n+1} - \tau_n$ pour tout entier naturel $n \geq 2$.
(on pourra distinguer le cas où n est pair de celui où n est impair)

ii. La série de terme général τ_n est-elle convergente ?

iii. Déterminer deux réels γ_1 et γ_2 tels que, pour n tendant vers $+\infty$:

$$\left| \tau_n - \frac{\gamma_1}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n \gamma_2}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{K}{n^2\sqrt{n}}$$

où K est une constante positive que l'on ne cherchera pas à déterminer.

iv. En déduire la convergence de la série de terme général $(-1)^n \tau_n$.

4. Dans cette question uniquement, on suppose que la fonction f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
Soit n un entier naturel non nul.

a. Montrer que : $n\,F(n) - f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left[f\left(\frac{t}{n}\right) - f(0) \right] e^{-t}\,dt$.

b. Soit ε un réel strictement positif.
Montrer qu'il existe un réel positif, que l'on notera A_ε, indépendant de n, tel que :

$$\int_{A_\varepsilon}^{+\infty} \left| f\left(\frac{t}{n}\right) - f(0) \right| e^{-t}\,dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

c. Quelle est la limite de $n\,F(n) - f(0)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

II. Deuxième partie

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. On désignera par λ_1 et λ_2 ses racines, avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x - 1}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ privé de λ_1 et λ_2.

3. Rappeler la formule de Leibniz donnant la dérivée $n^{\text{ième}}$ du produit de deux fonctions u et v de classe C^n.

4. On suppose, uniquement dans cette question : $n \geq 2$.

En utilisant la relation $(x^2 + x - 1)f(x) = 1$, montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$ privé de λ_1 et λ_2:

$$(x^2 + x - 1)f^{(n)}(x) + n(2x + 1)f^{(n-1)}(x) + n(n - 1)f^{(n-2)}(x) = 0$$

5. On pose, pour tout entier naturel p : $u_p = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$.

   a. Que valent u_0 et u_1 ?

   b. On suppose, uniquement dans cette question : $p \geq 2$. Montrer que : $u_p = u_{p-1} + u_{p-2}$.

   c. En remarquant que $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 2, exprimer, pour tout entier naturel $p \geq 2$, u_p en fonction de p, λ_1 et λ_2.

6. Exprimer, en utilisant la formule de Taylor-Young, le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0.

7. *a.* Déterminer deux réels α et β tels que :

$$\frac{1}{x^2 + x - 1} = \frac{\alpha}{x - \lambda_1} + \frac{\beta}{x - \lambda_2}$$

   b. Exprimer, en fonction de λ_1 et λ_2, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x - \lambda_1}$.

   Donner, de même, en fonction de λ_1 et λ_2, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\beta}{x - \lambda_2}$.

   c. Retrouver alors le résultat du 5. *c.*

8. On s'intéresse maintenant à la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\lambda_2{}^n$.

   a. Cette série est-elle convergente ?

   b. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$?

III. Troisième partie

1. *a.* Soit x un réel strictement positif, tel que $x < 1$. Que vaut : $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$?

   b. En déduire, pour tout réel strictement positif $y > 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{y^n} = \frac{1}{y - 2 + \frac{1}{y}}$$

   (On justifiera avec soin toutes les étapes du calcul)

2. On introduit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$w_0 = 0,\ w_1 = 1\text{, et, pour tout entier naturel } n \geq 2 : w_n = w_{n-1} + w_{n-2}.$$

   a. Exprimer, pour tout entier naturel $n \geq 2$, w_n en fonction de n.

   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$?

   b. Montrer que, pour des valeurs du réel x convenables :

$$\left(1 - x - x^2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = x$$

   c. En déduire, pour des valeurs du réel y que l'on précisera : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w_n}{y^n} = \frac{1}{y - 1 - \frac{1}{y}}$.

IV. Quatrième partie

Un quadrillage a une longueur de n carreaux et une hauteur de 2 carreaux.
Quel est le nombre de manières de paver complètement ce quadrillage par des rectangles de côtés de longueurs respectives 1 et 2 (les dominos recouvrent deux cases ayant un côté commun) ? (on exprimera le résultat à l'aide d'une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, en supposant $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ et on donnera la relation de récurrence qu'elle vérifie pour tout entier naturel $n \geq 3$).

Au cours de ce problème, on a, successivement, étudié quelques propriétés de la Transformation de Laplace, et de la transformée en Z, qui n'est autre que la Transformée de Laplace d'un signal discret, et permet de ce fait un traitement des signaux et systèmes. En première partie, on s'est intéressé à diverses propriétés de la transformée de Laplace, dont, notamment, celle d'un signal discret. En deuxième partie, on a étudié quelques propriétés de la suite de Fibonacci. La troisième partie a conduit à la transformée en Z de celle-ci. En repassant à la Transformation inverse, on retrouve l'expression analytique des termes de la suite de Fibonacci obtenue en deuxième partie. La quatrième partie est une application amusante.