Rapport sur l'oral de Mathématiques I

Remarques générales

L'oral de mathématiques I consiste en une interrogation au tableau sans préparation, d'une durée de 30 minutes. L'exercice proposé au candidat porte sur l'ensemble du programme des deux années de préparation (algèbre, analyse et géométrie), et est de difficulté graduelle, les premières questions étant toujours très abordables. En ce qui concerne la répartition des exercices, un tiers concerne le programme d'algèbre, un tiers, celui d'analyse, et un tiers, celui de géométrie. Lorsqu'un deuxième exercice est proposé, il porte sur une autre partie du programme.

Le but de cet oral est de juger et d'évaluer :

- les connaissances ;
- le savoir-faire technique et les capacités mathématiques ;
- l'imagination et l'adaptabilité dans une situation un peu nouvelle des candidats.

Afin de juger de la performance de ceux-ci, l'examinateur prend en compte les éléments suivants (liste non exhaustive) :

- la compréhension du problème posé ;
- les initiatives prises (cerner les difficultés, les nommer, donner des directions pour les surmonter) ;
- la précision du langage et la connaissance précise du cours, la capacité d'envisager différentes méthodes et de réfléchir à leurs utilisations ;
- la justification précise de ce qui est fait ;
- l'organisation et la présentation du tableau, la qualité de l'expression orale.

En fin de planche d'oral, cinq minutes sont réservées à des questions de cours. Parmi les questions posées cette année - entre autres, et toujours très, très classiquement : l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la définition d'un produit scalaire, la formule de Green-Riemann dans le plan, le théorème de Dirichlet, le théorème de Parseval, la convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro, en précisant l'encadrement de la somme et la majoration du reste, la formule de Taylor-Young (et son utilité), la formule de Taylor avec reste intégral, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction numérique de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, le théorème des accroissements finis, le théorème de convergence radiale, la caractérisation d'un endomorphisme diagonalisable à l'aide des dimensions des sous-espaces propres, définition et propriété de la trace, trace d'un projecteur, formules de Frenet (et utilité), suites adjacentes, définition et caractéristiques des isométries, caractérisation des projecteurs, caractérisation des symétries, matrices orthogonales, définition et caractéristiques d'une ellipse, définition et classification des quadriques, définition d'une conique, développements en série entière classiques, continuité/dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre, classification des isométries vectorielles en dimension 2, ...

Au-delà de ces exemples, nous rappelons qu'une question de cours peut porter sur l'ensemble du programme des deux années PTSI-PT (énoncé d'un théorème, rappel d'une définition, ...) La très bonne connaissance du cours est, aussi, indispensable pour pouvoir traiter correctement les exercices (on peut citer : le théorème de dérivation sous le signe $\int$, la connaissance des composantes du vecteur tangent à une courbe en polaires, ...), et ne doit pas rester superficielle (ainsi, certains candidats savent définir des coniques à partir de l'excentricité, mais ne savent pas ce qu'est l'excentricité, d'autres disent qu'un polynôme doit être scindé sans préciser si c'est dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ...)
La bonne connaissance du cours est prise en compte, de façon non négligeable, dans la note finale attribuée au candidat.

Remarques particulières

Nous avons les remarques suivantes :

$\leadsto$ Le programme d'algèbre de première année est très souvent mal maîtrisé, et ce sans avoir besoin d'aller chercher des choses très compliquées (notion de famille libre, caractérisation des sous-espaces vectoriels, définition d'une symétrie...).

$\leadsto$ La notion de matrice de passage n'est pas toujours maîtrisée. Un nombre non négligeable de candidats ne connaît pas l'effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur.

$\leadsto$ Les calculs sur les matrices de taille 2×2 ou 3×3 sont laborieux. Il est aussi important d'utiliser les outils adaptés. Ainsi, pour chercher le rang d'une matrice triangulaire de taille 3×3 dont aucun terme diagonal n'est nul, il n'est pas nécessaire de recourir au Pivot de Gauss.

$\leadsto$ Certains candidats ont du mal à donner la définition du rang et de la trace d'une matrice.

$\leadsto$ Les candidats savent, en général, donner la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée. Par contre, très peu font le lien entre l'expression de l'image d'un vecteur par un endomorphisme et cette matrice.

- $\rightsquigarrow$ Les définitions d'endomorphisme symétrique ou d'endomorphisme orthogonal sont sues par moins d'un candidat interrogé sur deux. Même parmi ceux qui savent à peu près, le fait qu'on travaille dans un espace préhilbertien est omis. La réduction des endomorphismes symétriques passe toujours par la matrice, mais presque aucun candidat ne sait dire que la matrice est symétrique seulement en base orthonormale (idem pour les endomorphismes orthogonaux). L'orthonormalité d'une base de vecteurs propres (ou l'orthogonalité de la matrice de passage) est globalement oubliée.

- $\rightsquigarrow$ La notion d'ordre de multiplicité d'une valeur propre est mal maîtrisée. Le lien avec l'ordre de multiplicité dans le polynôme caractéristique est difficile pour les candidats, comme s'il y avait trop de mots à prononcer.

- $\rightsquigarrow$ Les candidats ont du mal à manipuler les matrices E_{ij} de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- $\rightsquigarrow$ Le théorème du rang est assorti d'hypothèses inutiles (uniquement pour les endomorphismes par exemple).

- $\rightsquigarrow$ En algèbre linéaire, de façon globale, il y a beaucoup de confusions. Les candidats insèrent dans une même formule des objets qui vivent dans des espaces différents : ce qui est écrit n'est pas seulement faux, mais aussi vide de sens.

- $\rightsquigarrow$ Le moindre calcul donne lieu à de véritables scènes de panique. A de rares exceptions près, ceux-ci étaient pourtant très raisonnables. Nous avons noté un manque de réflexes vis-à-vis de calculs souvent laborieux et très mal menés. Le calcul de dérivées de fonctions composées par exemple, semble être difficile.

- $\rightsquigarrow$ Les formules les plus simples de trigonométrie ne sont pas toujours connues.

- $\rightsquigarrow$ L'ignorance des quantificateurs est fréquente, et à chaque fois génératrice d'erreurs. Certains candidats ne savent pas répondre à la question « écrire $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ avec des quantificateurs ».

  Nombre ne semblent pas se rendre compte que les quantificateurs sont indispensables, et que sans eux la plupart des assertions sont fausses. Alors qu'une quantification bien faite est une aide pour résoudre les problèmes. Il est regrettable que les candidats ne sachent pas écrire, mathématiquement, la négation d'une affirmation mathématique, ce qui leur permettrait d'être plus à l'aise dans les raisonnement logiques.
  Enfin, nous rappelons que « soit » n'est pas un quantificateur.

- $\rightsquigarrow$ L'hypothèse de continuité dans l'existence d'une intégrale est très rarement citée.

- $\rightsquigarrow$ Pour démontrer des inégalités, certains candidats ne font pas attention aux signes lorsqu'ils veulent multiplier les quantités en jeu, alors que c'est fondamental, car cela change le sens de l'inégalité.

- $\rightsquigarrow$ Les propriétés de l'intégrale fonction de sa borne supérieure ne sont pas toujours bien maîtrisées. Ainsi, si f désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}$, certains candidats ne savent pas dériver la fonction qui, à tout réel x, associe $\displaystyle\int_{-x}^{2x} f(t)\,dt$.

- $\rightsquigarrow$ Les automatisme élémentaires pour prouver la convergence d'une intégrale (majoration et équivalence) ne sont souvent pas acquis. Pour montrer qu'une intégrale impropre est convergente, certains candidats cherchent à majorer la fonction à intégrer par une fonction intégrable, mais oublient les valeurs absolues, ce qui conduit à des aberrations (majorations de quantités positives par des quantités négatives).

- $\rightsquigarrow$ Les restes des diverses formules de Taylor sont souvent très approximatifs, au pire totalement absents. C'est le cas, en particulier de la formule de Taylor-Young à l'ordre deux pour les fonctions de deux variables.

- $\rightsquigarrow$ La sommation de la série de terme général $\dfrac{x^n}{n}$ a été difficile, et le résultat surprenant plus d'une fois.

- $\rightsquigarrow$ Certains candidats ont du mal à déterminer les racines $n^{ièmes}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, d'un nombre complexe non nul, ou, encore, à interpréter $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{b\}$, ou à écrire l'angle entre deux vecteurs en fonction des affixes de ceux-ci.

- $\rightsquigarrow$ Si les candidats connaissent en général la formule donnant le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ et son interprétation géométrique, ils ne connaissent pas l'interprétation géométrique de la norme du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$, ni la formule du produit mixte, qui est le déterminant des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$, et ignorent le lien avec le volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs.

- $\rightsquigarrow$ Il n'est pas interdit de faire des dessins, surtout lorsque l'exercice porte sur la géométrie ...

- $\rightsquigarrow$ L'étude des courbes en polaires n'est pas toujours maîtrisée.

- $\rightsquigarrow$ La différence entre intégrale curviligne et intégrale double semble floue pour certains candidats.

- $\rightsquigarrow$ La circulation d'un champ de vecteurs n'est pas toujours connue.

- $\rightsquigarrow$ La classification des quadriques est très bien maîtrisée (ce qui a été très apprécié par le jury).

- $\rightsquigarrow$ L'identité du parallélogramme, pour le produit scalaire, n'est pas toujours connue. En outre, les candidats ne font pas toujours le lien entre produit scalaire et norme, ce qui est dommage.

- ⇝ C'est très bien - et déjà énorme de connaître son cours, mais il est important de pouvoir combiner entre elles les différentes notions du programme (et de ne pas perdre ses moyens lorsqu'on demande de le faire). Nous rappelons qu'il n'y a pas de cloisons hermétiques entre les différentes parties des mathématiques.

- ⇝ Une bonne partie des candidats expliquent très bien et en se tournant vers l'examinateur le contenu du sujet et ce qu'ils vont faire, alors que d'autres restent plusieurs minutes à écrire au tableau sans dire un mot et attendent qu'on les questionne. Un candidat n'a pas prononcé un seul mot de sa planche, écrivant tout au tableau ! Un autre a fait quelque chose de similaire, même si c'était un peu moins excessif. Nous sommes obligés de sanctionner une telle attitude. Il est préférable de parler à l'examinateur plutôt qu'au tableau.
  D'autres candidats écrivent tout au tableau, y compris les phrases qu'ils viennent de prononcer et auxquelles l'examinateur vient d'acquiescer : c'est du temps perdu, car il ne s'agit pas d'une épreuve écrite.