Exemple de question posée avec exigence dans le domaine de la rédaction : déterminer, en détaillant avec soin les différentes étapes du raisonnement, le champ électrostatique créé par une boule uniformément chargée (avec la densité volumique ρ) en un point M situé à l'intérieur de cette boule ; on notera O le centre de la boule et r la distance OM.

Réponse rapide trop souvent rencontrée

Du fait de la symétrie sphérique, le champ est radial et l'application du théorème de Gauss donne $E(r).4\pi r^2 = \dfrac{\rho}{\varepsilon_o}\dfrac{4}{3}\pi r^3$ d'où $E(r) = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_o}$ et $\vec{E}(M) = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_o}\vec{u}_r$.

Réponse attendue pour bénéficier de tous les points du barême

a - Caractère radial du champ :

- Tous les plans contenant OM sont de symétrie (ou π^+) pour la distribution de charge ; le champ en M, qui appartient à tous ces plans, est donc nécessairement radial ; on pose $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_r$;

ou :

- La distribution de charge proposée présente une symétrie de révolution (i.e. une invariance dans toute rotation) autour de la droite OM, donc le champ en M est radial ; on pose $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_r$.

b - E(M) ne dépend que r :

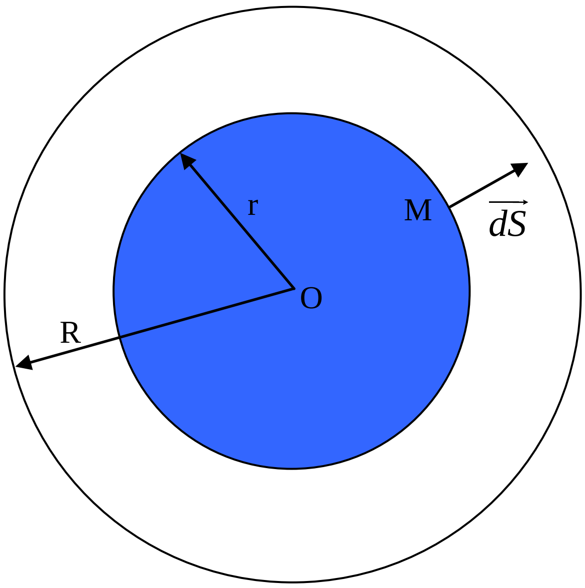
- Il y a symétrie de révolution par rapport à tout axe diamétral (i.e. contenant O), donc E(M) ne dépend pas de θ, ni de ϕ ; seul r est paramètre.

On peut faire un traitement simultané des parties a et b :

Il y a symétrie de révolution de la distribution de charge par rapport à tout axe diamétral (i.e. contenant O), donc le potentiel V ne dépend pas de θ, ni de ϕ : V(M) = V(r) . Ainsi $\vec{E}(M) = -\dfrac{dV}{dr}\vec{u}_r = E(r)\vec{u}_r$, puisque $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,V$.

c – Détermination de E(r) par application du théorème de Gauss

On applique le théorème de Gauss à la sphère centrée en O et passant par M.



Alors $\overrightarrow{dS} = dS\,\overrightarrow{u_r}$ et $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$, donc

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \oiint_S E(r)\cdot dS = E(r)\oiint_S dS ,$$

soit : $\oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = E(r)4\pi r^2$.

Par ailleurs, $Q_{\text{int}} = \iiint_{V_{\text{int}}} \rho\, d\tau = \rho\iiint_{V_{\text{int}}} d\tau$ (V_{int} est uniformément chargé puisque r<R),

soit : $Q_{\text{int}} = \rho\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Ainsi $E(r)4\pi r^2 = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_o} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_o}\dfrac{4}{3}\pi r^3$, d'où :

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_o} \quad \text{puis} \quad \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_o}\overrightarrow{u_r}}.$$