Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *correcteur* désignera une correctrice ou un correcteur.

Remarques générales

Le sujet de cette année concernait les propriétés de fonctions trigonométriques permettent d'exprimer des sommes de séries classiques – comme $\mathcal{C} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)^2}$, où $\mathcal{C}$ est la constante de Catalan – ou encore, la très classique intégrale de Gauss, dont la valeur peut être déterminée à l'aide d'intégrales à paramètres.

Cette épreuve a été globalement bien réussie. L'intégralité du sujet a été traitée dans de très bonnes copies, qui ont donc obtenu la note maximale de vingt sur vingt. A côté, il reste, comme chaque année, de très faibles copies, où les candidats ne semblent pas faire la différence entre une fonction polynomiale et une fonction trigonométrique.

Comme l'an passé, nous alertons sur l'écriture difficilement déchiffrable d'un grand nombre de copies. L'orthographe laisse toujours à désirer, en particulier, quand il s'agit de termes mathématiques, sans compter avec les sempiternelles abréviations : ≪ cv ≫, par exemple, ou la terminologie transformée : si on dit qu'une intégrale est impropre, on ne parle pas ≪ d'impropreté ≫. D'autre part, certains candidats utilisent un vocabulaire inadapté au contexte d'un concours. Par exemple, écrire des mots comme ≪ débile ≫, ≪ houlà ≫, sur une copie de concours n'est pas une bonne idée.

Nous rappelons que les traits se tirent **à la règle**, et que les résultats doivent être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.

Remarques particulières

Préambule

1. La majorité des candidats (au moins 90%) ont su redonner les deux expressions (l'une faisant intervenir la fonction *cosinus*, l'autre la fonction *tangente*) de la dérivée de la fonction tangente.

2. (a) Dans cette question, la majorité des candidats ont calculé les limites à gauche et à droite en $\dfrac{\pi}{2}$ de la fonction g. Quelques uns ont remarqué qu'en considérant directement la fonction $\tilde{g}$ telle que, pour tout réel x de $]0,\pi[$, $\tilde{g}(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, on obtenait directement le prolongement continu de $]0,\pi[$, et que $\tilde{g}$ était dérivable sur $]0,\pi[$.

   Pour le reste, l'étude de la dérivabilité de $\tilde{g}$ a posé de gros problèmes, et a même découragé une large partie des candidats.

   (b) La majorité des candidats ont obtenu $-\tilde{g}$ comme primitive sur $]0,\pi[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$. Beaucoup trop de candidats n'ont pas fait attention au signe, et ont donné $\tilde{g}$.

3. (a) Très peu de candidats ont donné les domaines de définition respectifs $\mathcal{D}_{f_1} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{f_2} \subset \mathbb{R}$ des fonctions f_1 et f_2. Cette question a suscité beaucoup de réponses soit très incomplètes : « $\mathcal{D}_{f_1} =]-\pi,\pi[$ », « $\mathcal{D}_{f_2} =]0,\pi[$ », « $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \left\{x\,,\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) < 0\right\}$ », soit fantaisistes et complètement erronées : « $\mathcal{D}_{f_1} = \left]0,\dfrac{\pi}{4}\right[$ » (extrapolation de la question 4 ?), « $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}$ », « $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}^\star$ », etc ... Un nombre important de candidats ne sait pas écrire correctement une réunion d'intervalles, ou ajoute des réels à des intervalles : « $]-\pi,\pi[+2\,k\,\pi$ », par exemple, quand ce ne sont pas des « intervalles modulo quelque chose, $]-\pi,\pi[\,[2\,\pi]$ ». Les quantificateurs ne sont pas connus, le signe « $=$ » n'est pas toujours présent ; avons trouvé, à maintes reprises : « $\mathcal{D}_{f_2} \cap]2\,k\,\pi, \pi + 2\,k\,\pi[$ » (ou autres variantes).

(b) Tous les candidats n'ont pas réussi à montrer que les fonctions f_1 et f_2 étaient2π-périodiques. Il est aussi surprenant de lire fréquemment que les périodes de f_1 et f_2 sont différentes.

Certains candidats ont cherché à étudier la parité de la fonction pour répondre à la question.

(c) Très peu de candidats ont donné les domaines de dérivabilité respectifs des fonctions f_1 et f_2. Les réponses ne sont pas souvent justifiées, les arguments revenant fréquemment sont : « par opérations », ce qui, dans ce contexte, est insuffisant. Il fallait, au minimum, rappeler que la fonction tangente est dérivable sur son domaine de définition, et la fonction logarithme népérien sur le sien.

D'autres candidats calculent f_1' et f_2', puis « déduisent » des domaines de définition de f_1' et f_2' les domaines de dérivabilité respectifs des fonctions f_1 et f_2 ...

(d) La plupart des candidats ont donné l'expression correcte de $f_1'(x)$. Certains ne maîtrisent visiblement pas la dérivation composée, et ont omis le facteur $\frac{1}{2}$.

(e) Dans cette question également, la plupart des candidats ont donné l'expression correcte de $f_2'(x)$. Certains ne connaissent pas les formules d'addition trigonométriques, et n'ont donc pas obtenu l'expression simplifiée de $f_2'(x)$ comme demandé.

(f) Dans cette question, on demandait d'étudier les variations des fonctions f_1 et f_2, et de donner leurs tableaux de variations respectifs sur une période, en précisant les limites aux bords. Un nombre important de candidats ont donné, pour la fonction f_1, son tableau de variation sur $[0,\pi[$ (sans aucune mention de l'imparité de la fonction). En ce qui concerne la fonction f_2, de nombreuses copies la donnent définie sur $]-\pi,\pi[$, puis $]\pi,2\pi[$.

Nous avons aussi trouvé des copies donnant les tableaux de variation respectifs de f_1 et f_2 sur $]3\pi,5\pi[$ et $]4\pi,5\pi[$ – ce qui n'est pas faux – mais peu naturel en tout cas. Il nous semble important de rappeler que les réponses attendues sont les réponses naturelles – les plus simples.

Il était demandé également de donner les valeurs des fonctions f_1 et f_2 en $\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, ce qui n'a pas toujours été fait.

(g) Dans cette question, il était demandé de tracer, sur un même graphe, et non deux, la courbe représentative de f_1 sur $\mathcal{D}_{f_1} \cap [-2\,\pi, 2\,\pi]$ et la courbe représentative de f_2 sur $\mathcal{D}_{f_2} \cap [-2\,\pi, 2\,\pi]$. Si de nombreux tracés de la courbe représentative de f_1 sont corrects, c'est beaucoup moins le cas pour la courbe représentative de f_2 (branches paraboliques qui correspondent à des valeurs en dehors du domaine de défintion, par exemple, quand la courbe ne s'arrête pas brusquement pour la valeur $y = 1$ ...)

4. (a) Tous les candidats n'ont pas explicité correctement le domaine de définition de la fonction f_3. Comme cela était le cas dans la question 3. a, beaucoup répondent que c'est ≪ $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ≫.

(b) Tous les candidats n'ont pas non plus su étudier les variations de la fonction f_3 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, qui, dans de nombreuses copies, a été donnée comme ≪ décroissante ≫ sur cet intervalle, en contradiction complète avec des bornes en ordre croissant.

Certains candidats ont visiblement oublié l'intérêt que peut représenter le signe de la dérivée. Celle-ci n'est donc pas toujours donnée, ce qui conduit à des tableaux de variations obtenus on ne sait trop comment. Nous rappelons aussi que, pour obtenir un tableau de variations, il faut étudier le signe de la dérivée, et non simplement les valeurs d'annulation de celle-ci.

Certains candidats ont étudié ≪ à la main ≫ la croissance de la fonction f_3, ce qui est quand même conséquemment plus long que d'étudier le signe de sa dérivée.

Partie I

1. Un nombre significatif de candidats ne comprend pas que les différentes questions de cette question s'enchaînent. Il est suprenant de voir une bonne réponse à la question 1. a. et une mauvaise réponse en 1. b, ou inversement. Les candidats doivent analyser la structure du sujet, et y chercher des indications de stratégie.

(a) La majorité des candidats ont su donner une primitive sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction logarithme népérien. Certains, dans une proportion hélas non négligeable, ont confondu dérivée et primitive, et ont donné la fonction inverse $t \mapsto \dfrac{1}{t}$. D'autres ont donné la fonction *arctangente*.

(b) La majorité des candidats ont su exprimer, en fonction du réel $\varepsilon > 0$, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1} \ln t \, dt$. Nous notons pas mal d'erreurs d'étourderie à cette question, de nombreux candidats n'ont pas fait attention aux signes, et donnent comme réponse $-1-\varepsilon-\varepsilon \ln \varepsilon$.

(c) Tous les candidats n'ont pas pensé à utiliser la question précédente pour étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln t \, dt$. Certains l'ont redémontrée en utilisant le fait que, lorsque $t \to 0^{+}$, $\sqrt{t} \ln t = o(1)$.

De nombreux candidats se contentent d'écrire que « c'est un résultat du cours », sans aucune justification afférente, et n'ont donc pas obtenu les points à cette question.

Il est parfois proposé deux réponses différentes à cette question, l'une qui suit le sujet et l'autre qui met en place un argument de comparaison indépendant du début de la question, souvent incorrect (à ce propos, nous rappelons que le critère de convergence des intégrales de Riemann en 0 n'est pas le même qu'en $+\infty$). Ce n'est pas au correcteur de faire le choix entre les deux approches : un argument correct et un argument faux ne rapportent aucun point.

2. L'étude de la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx$, question plus difficile, n'a été correctement traitée que par peu de candidats. Beaucoup veulent composer des équivalents ! Par ailleurs, une majoration de la fonction à intégrer ne prouve rien dans le cas des fonctions à valeurs négatives. L'une ou l'autre de ces deux erreurs est très fréquente.

   Un nombre important de candidats se lancent dans un changement de variable, et tous les calculs qui suivent. Or, s'il était effectivement possible d'utiliser le résultat du programme (changement de variable sur la nature des intégrales), très peu l'ont fait correctement.

   Le candidats sont amenés à réfléchir sur la juste distance à avoir vis-à-vis du cours : il est indispensable d'en connaître les énoncés et les méthodes, mais il peut être problématique de vouloir en faire un usage excessivement dogmatique, certaines situations demandent de s'inspirer du cours, sans chercher à y plaquer un énoncé tout fait.

3. La majorité des candidats ont redonné le développement en série entière de la fonction arctangente. Le rayon de convergence n'est pas toujours correct, de nombreuses copies donnant « $+\infty$ »... D'autre part, nous notons de nombreuses confusions entre *rayon de convergence* et *domaine de convergence*. Certains candidats

répondent que « le rayon de convergence est l'intervalle de convergence « $]-1,1[$ » – ou « $[-1,1]$ » dans d'autres cas ...

4. Les outils du cours nécessaires pour aborder cette question sont très mal connus. L'échange de $\sum$ et $\displaystyle\int$ de cette question n'a pas souvent été bien traité. Beaucoup de candidats disent qu'ils appliquent le théorème d'inversion limite et intégrale, sans plus de précisions. Ceux qui ont voulu appliquer le théorème d'intégration terme à terme du nouveau programme (item *d.*, page 16), ne connaissent pas toujours correctement les hypothèses. Ainsi, c'est la série $\displaystyle\sum \int_I |f_n|$ qui doit converger, la convergence de $\displaystyle\sum \int_I f_n$ ne suffit pas. Ce n'est pas non plus $\displaystyle\sum \left|\int_I f_n\right|$. Nous avons trouvé aussi beaucoup de réponses fantaisistes, les candidats justifiant l'échange de $\sum$ et $\displaystyle\int$ par « intégration par parties », « croissance de l'intégrale », linéarité ...

   Certains candidats justifient correctement l'échange, mais, par contre, ne font pas le calcul ...

5. (a) Beaucoup de candidats ont correctement effecué le changement de variable $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = u$, et obtenu la relation attendue.

   Certains font le changement de variable, mais de façon extrêmement compliquée et lourde (avec des cosinus d'arctangentes, des divisions, multiplications ...). D'autres écrivent les bonnes intégrales, mais on ne peut pas suivre le calcul, puisqu'il n'y a pas d'égalités !

   (b) Très peu de candidats ont su justifer que $\dfrac{8}{9}$ était une valeur approchée de la constante de Catalan $\mathcal{C}$. Beaucoup se sont contentés de dire que l'on faisait le calcul des deux premiers termes de la somme. Peu ont pensé à utiliser le théorème de convergence des séries alternées. Certains l'ont fait, mais sans aucune mention au théorème ...

   (c) Très peu de candidats ont donné d'un entier naturel non nul N à partir de laquelle S_N est une valeur approchée de $\mathcal{C}$ à 10^{-2p} près. Certaines copies connaissaient visiblement le théorème de convergence des séries alternées, qui est là encore utilisé sans même être cité ...

Partie II

1. La majorité des candidats ont montré que, pour tout réel x de $]0, \pi[$:

$$f_4''(x) = -f_4(x) + \frac{\cos x}{\sin x}$$

Certains candidats se sont lancés dans des calculs extrêmement compliqués (parfois plusieurs pages), où, avec la meilleure volonté du monde, le calcul n'est pas vérifiable. Il faut penser que les calculs sont destinés à être lus et vérifiés, et qu'un calcul inutilement compliqué n'obtiendra pas les points. D'autre part, un certain nombre de candidats obtiennent *magiquement* le résultat ... Nous rappelons que l'honnêteté intellectuelle est essentielle dans une copie. Il fallait en particulier écrire simplement la dérivée première (ce qui n'a pas toujours été le cas). Même si cela ne changeait rien au résultat final, certains candidats ont remplacé $\dfrac{\sin x}{\sin x}$ par 0.

2. La majorité des candidats ont su résoudre l'équation homogène. Attention, dire que les solutions sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda\, e^{i\,t} + \mu\, e^{-i\,t}$$

sans préciser la nature des constantes (dans ce cas, des constantes complexes), ne répond pas à la question. Les candidats ayant écrit que les constantes étaient réelles n'ont évidemment pas eu les points.

Un nombre non négligeable de candidats ont toutefois donné des réponses fantaisistes : $\ll\ t \mapsto \lambda\, e^t + \mu\, t \gg$, $\ll t \mapsto \lambda\, \cos t \gg$, $\ll t \mapsto \cos t + \sin t\ \gg$, $\ll x \mapsto A\, \cos t + B\, \sin t \gg$ etc ...

Cette équation différentielle est très classique et utilisée dans d'autres matières – *l'oscillateur harmonique*, d'ailleurs cité par quelques candidats – il est étonnant qu'il n'y ait pas davantage de candidats qui connaissent le résultat.

3. Peu de candidats ont montré que les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0, \pi[$ étaient de la forme $y = y_0 + f_4$, où y_0 est une solution de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$. Certains se contentent d'écrire $\ll$ qu'on remplace dans $(\mathcal{E})$ $\gg$, pour obtenir ensuite $\ll \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}\ \gg$ et conclure ensuite au résultat ...

Beaucoup de candidats vérifient que les fonctions de la forme $\ll$ solution particulière + une solution de l'équation homogène $\gg$ sont effectivement des solutions de l'équation différentielle, mais ne commentent pas sur le fait que ce sont LES solutions de l'équation (la rigueur logique fait d'ailleurs globalement défaut dans l'ensemble des copies). L'écriture seule $y = y_0 + f_4$ – sans autre forme de commentaire – n'est pas auto-interprétable. Les candidats gagneraient en efficacité s'ils connaissaient la structure de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire. Il est par exemple a priori absurde de ne pas fabriquer à la question 2 un espace vectoriel de dimension 2 de solutions. A noter que certains candidats confondent le nombre de solutions et la dimension de l'espace des solutions.

Pour obtenir les points dans cette question, il fallait au minimum citer (correctement) le cours : principe de superposition, théorème de structure, ou bien, un raisonnement qui fait apparaître une équivalence : ≪ les $y = y_0 + f_4$ sont bien solutions ≫, d'une part, et ≪ si y est solution alors $y - f_4$ est solution de l'équation homogène ≫, d'autre part.

(a) La plupart des candidats ont su montrer que, si y est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0,\pi[$, alors z' est solution sur $]0,\pi[$ d'une équation différentielle du premier ordre. Nous avons noté un certain nombre d'erreurs d'étourderie sur les réponses finales, beaucoup de candidats obtenant correctement, pour tout réel x de $]0,\pi[$,

$$z''(x)\,\sin x + 2\,z'(x)\,\cos x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad (\mathcal{E}')$$

mais donnant ensuite $z''(x)\,\sin x + z'(x)\,\cos x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ (oubli du facteur 2), ou $z''(x) + z'(x)\,\dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, ce qui fausse la suite de leurs résultats.

(b) Une grande partie des candidats ont su déterminer les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}')$. Nous avons relevé beaucoup d'erreurs d'étourderie : omission du signe *moins*, ce qui conduisait à des expressions en $\sin^2 x$, et non son inverse. D'autre part, de nombreux candidats ne simplifient pas les expressions obtenues, et continuent tous leurs calculs avec des expressions en $e^{-2\,\ln(\sin x)}$.

Un peu moins de la moitié des candidats ont correctement appliqué la méthode de variation de la constante pour déterminer les solutions de $(\mathcal{E}')$.

(c) Cette question n'a pas toujours été bien traitée. Alors que cela était bien indiqué dans le sujet, il fallait utiliser le Préambule pour obtenir les primitives des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$.

La méthode de résolution de l'équation différentielle de la question 4 . est globalement connue de manière trop approximative, et les solutions trouvées en 4 .b . ne permettent souvent pas d'aborder cette question et la suivante.

La constante d'intégration est trop souvent omise (ce qui ne permet pas d'ailleurs de répondre correctement à la question suivante).

(d) Cette question n'a été que peu traitée, beaucoup de candidats n'allant pas au bout de leur raisonnement et n'exploitant pas leurs résultats – pourtant corrects

– à la question précédente.

Partie III

1. Très peu de candidats ont correctement donné $\mathcal{D}_G = \mathbb{R}$. Beaucoup confondent l'existence de l'intégrande $e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}$, et sa continuité.

2. Très peu de candidats ont correctement étudié la continuité de la fonction G. Beaucoup ne semblent pas avoir compris que la majoration indépendante de x – la fameuse *hypothèse de domination* par une fonction φ, à valeurs positives, ne dépendant pas de x, intégrable sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ requise par le théorème de continuité des intégrales à paramètres est la seule façon d'obtenir la continuité par rapport à la variable x en un point x_0 – ce qui ne s'obtient pas avec une dépendance de φ par rapport à la variable x. Ainsi, les réponses faisant intervenir e^{-x^2} – quand ce n'est pas e^{-x} ne marchent pas.

   Certains candidats ont trouvé la majoration de l'intégrande par 1, mais ne parvenaient pas à conclure car le nombre 1 ne leur semblait pas être une fonction dépendant de θ.

3. Pour obtenir $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$, un nombre important de candidats ont voulu passer à la limite dans l'intégrale, au lieu d'utiliser la majoration naturelle de l'intégrande $e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}$ par e^{-x^2}.

4. Très peu de candidats ont correctement étudié la dérivabilité de la fonction G. L'énoncé du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres n'est malheureusement pas toujours connu. Comme lors de l'étude de la continuité, l'hypothèse de domination de la valeur absolue de la dérivée par rapport à la variable x de l'intégrande par une fonction ϕ, ne dépendant pas de x, à valeurs positives, intégrable sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, fait souvent défaut. Les énoncés sont parfois incomplets, les candidats évoquant ≪ la domination ≫, mais sans plus de précisions (aucune mention de l'intégrabilité de la fonction dominante). D'autre part, de nombreuses erreurs ont été faites en termes de domination : absence de la valeur absolue, majoration par une quantité négative ; majoration de $e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}$ par $e^{-\frac{a^2}{\cos^2\theta}}$, ou par e^{-a^2}, quand ce n'est pas par $e^{-\frac{1}{\cos^2\theta}}$.

5. (a) Très peu de candidats ont réussi à justifier que $\mathcal{D}_H = \mathbb{R}$, puisque la fonc-

tion $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Cette question a donné lieu à quantité de réponses hors de propos, utilisant la dérivabilité ou la continuité d'intégrales à paramètres. D'autres candidats ont invoqué la convergence de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Nous rappelons que la construction à la base du programme d'intégration consiste à intégrer des fonctions continues sur un segment.

(b) Dans la lignée des réponses à la question précédente, peu de candidats ont montré que la fonction H était de classe C^1 sur $\mathcal{D}_H = \mathbb{R}$. Par contre, beaucoup de candidats ont correctement explicité la dérivée de H, en citant, comme il le fallait, le théorème fondamental de l'analyse. Ce manque de réflexion et de suite logique est dommage.

Beaucoup ont donné des réponses fantaisistes : « $H'(t) = e^{-t^2} - 1$ », par exemple.

6. Peu de candidats ont obtenu la bonne expression de la dérivée de la fonction G. Certains, ayant donné à la question 4 . des expressions fausses obtiennent, de façon *magique*, le résultat correct, sans se poser la question de la cohérence avec ce qu'ils ont écrit juste avant ...

7. Un certain nombre de candidats ont montré que la fonction $H^2 + G$ était constante. Mais tous ne vont pas au bout de la question, et ne précisent pas la valeur de cette constante.

   Nous rappelons aussi que si la dérivée d'une fonction s'annule sur l'intervalle où cette fonction est définie, alors la fonction est constante. Les ensembles de définitions de G et H conduisent souvent à des incohérences à cet endroit.

8. Les candidats ayant correctement répondu à la question précédente ont bien retrouvé la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Par contre, l'expression de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\,t^2}\,dt$, pour tout réel $x > 0$, a donné lieu à des réponses complètement fausses, comme « $\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^x$ », ou autres variantes, trouvés à maintes reprises dans les copies.

Partie IV

1. Tous les candidats ne connaissent pas le développement en série entière de la fonction sinus. Certains donnent la bonne expression, mais le rayon de convergence est faux : « 1 », parfois « 0 », ce qui montre une profonde méconnaissance de la notion de *rayon de convergence*. Nous avons aussi trouvé dans les copies un nombre non négligeable de développements faux : sans les $(-1)^n$, ou alors, sans les factorielles, ou encore, uniquement avec des puissances paires.

2. Si une grande majorité de candidats ont donné, pour tout réel x non nul,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n}}{(2\,n+1)\,!}$$

peu ont vérifié que la somme $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n}}{(2\,n+1)\,!}$ évaluée en 0 valait $1 = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

En outre, beaucoup de candidats ont affirmé qu'une fonction continue était développable en série entière.

3. Peu de candidats ont correctement traité cette question. Un nombre non négligeable de candidats donnent la bonne réponse, $\alpha_N = -\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2\,\pi^2}$, mais sans justification. Certains l'ont fait très proprement, par récurrence.

Nous avons relevé des erreurs d'étourderie – inattention, avec des sommes qui commencent à $k = 0$.

Le reste de cette partie est souvent bâclé, probablement par manque de temps. Nous insistons sur le fait que l'objectif de cette partie est de démontrer en particulier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Connaître le résultat et l'affirmer sans refaire la démarche ne rapporte rien (mais permet parfois de récupérer un point ou deux à la question 5.)

---

4. Un certain nombre de candidats ont retrouvé le résultat classique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Toutefois, un nombre non négligeable de candidats ont fait une erreur de signe et n'ont pas été surpris par la non cohérence du résultat ($-\frac{1}{6}$ au lieu de $\frac{1}{6}$).

5. Un bon quart des candidats ont su calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ à l'aide du résultat de la question précédente.

   Certains ne maîtrisent pas ces notions de sommes, et, sur la base « d'équivalences » entre $\frac{1}{2\,n+1}$ et $\frac{1}{2\,n}$, ont écrit des égalités entre $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)^2}$ et $\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

6. Un tout petit nombre d'excellentes copies a traité avec succès cette question. Bravo !

7. Comme dans le cas de la question précédente, un tout petit nombre d'excellentes copies a aussi traité avec succès cette question.