Rapport sur l'oral de Mathématiques I

Remarques générales

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *interrogateur* désignera une interrogatrice ou un interrogateur.

L'oral, qui dure 30 minutes (y compris la phase de vérification d'identité) est séparé en deux parties : 25 minutes sont consacrées à la résolution d'un exercice sans préparation, et le temps restant est consacré à une question de cours, sur un sujet différent de celui de l'exercice.

L'exercice proposé au candidat porte sur l'ensemble du programme des deux années de préparation (algèbre, analyse, probabilités et géométrie), et est de difficulté graduelle, les premières questions étant toujours très abordables. Les exercices sont répartis de façon équilibrée entre algèbre, analyse, probabilités, géométrie. Lorsqu'un deuxième exercice est proposé, il porte sur une autre partie du programme.

Les exercices font l'objet d'une concertation entre les membres du jury, qui veillent à ce que leurs difficultés soient comparables. Ces exercices présentent en général au moins trois ou quatre questions, la première, voire les deux premières, étant systématiquement faciles, leur solution n'excédant pas deux ou trois lignes. Donnons quelques exemples déjà cités dans les rapports précédents :

$\rightsquigarrow$ Tracer rapidement la courbe d'équation $y = x^3 - x$.

$\rightsquigarrow$ Déterminer selon la valeur du réel a le rang de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Montrer que si la fonction réelle $x \longmapsto x^2 f^2(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, il en est de même de la fonction $x \longmapsto f^2(x)$.

- Déterminer une représentation paramétrique de la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Si X suit une loi géométrique de paramètre p et si $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\mathbb{P}([X \geq n])$$

Les exercices sont conçus ainsi pour mettre en confiance le candidat.

Le jury souhaite cette année insister sur les points suivants :

- L'attitude globale des candidats est très satisfaisante. Notons cependant quelques erreurs assez fréquentes :

  - Certains candidats n'écoutent pas les indications fournies par l'examinateur et persistent parfois dans leurs erreurs sans réellement prendre en considération la remarque qui leur a été faite.

  - Il faut bien prendre le temps de lire le sujet, en particulier en probabilités.

  - Rappelons qu'il n'est pas correct de couper la parole à un examinateur, surtout lorsqu'il donne une indication.

- Nous avons noté les difficultés de certains candidats à répondre aux questions posées : ils marmonnent, évitent la question et passent à la suite spontanément.

- De nombreux candidats ont de bons automatismes lorsqu'on leur pose des questions, mais le fond n'est parfois pas maîtrisé (≪ Pourquoi faites-vous cette opération, est-il nécessaire de calculer ce polynôme caractéristique alors que la matrice est triangulaire... ≫)

- Les calculs sont comme souvent longs et laborieux. Quelques exemples qui ont donné des difficultés surprenantes :

  - Résoudre dans $\mathbb{R}$: $y^3 = 2\,y$.

  - Simplifier $\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a\,d}{2} + \dfrac{d^2}{4}$.

- ⇝ Le programme de PTSI/PT n'est pas toujours connu. Les candidats semblent parfois découvrir certains éléments du programme quand on les interroge (par exemple, formule de transfert en probabilités, inégalité de Cauchy-Schwarz en probabilités encore, caractérisation de l'alignement de trois points à partir de leurs affixes complexes, formule de Taylor à l'ordre deux d'une fonction de deux variables, inégalité de Markov, PPCM et PGCD).

- ⇝ La question de cours est un élément important de l'évaluation. Lorsque l'examinateur demande un théorème, il attend des candidats un énoncé complet, comportant en particulier les hypothèses d'application du théorème.

  Les questions de cours sur les définitions des notions au programme ont réservé des surprises (par exemple : qu'est-ce qu'une application injective, qu'est-ce qu'un événement dans un espace probabilisé, qu'est-ce qu'une série convergente ?)

- ⇝ De bons et très bons candidats ont par ailleurs excellemment réussi cet oral. Une bonne prestation se caractérise par un vocabulaire conforme au programme, des phrases bien construites qui montrent une maîtrise des résultats du programme (vérification des hypothèses des théorèmes sans que l'examinateur ait à le demander, par exemple), une bonne logique, et une bonne réactivité aux éventuels indices donnés par l'examinateur. Il est souvent bénéfique, après les quelques premières questions, d'expliquer à voix haute les pistes de recherche, ce qui permet à l'examinateur de mieux guider le candidat. Il n'est pas nécessaire de terminer les exercices pour avoir une bonne note.

Remarques particulières

Analyse

- ⇝ Le jury a constaté des difficultés pour vérifier qu'une fonction définie par morceaux est continue.

- ⇝ De nombreux candidats confondent *intégrale* et *primitive*.

- ⇝ Le jury rappelle qu'il faut faire attention à ne pas utiliser le critère des séries alternées avec un équivalent du terme général.

- ⇝ La hessienne est très rarement bien utilisée pour déterminer la nature des points critiques.

- $\rightsquigarrow$ Le théorème de Schwarz n'est pas connu par tous les candidats.

- $\rightsquigarrow$ Concernant la fonction *arccosinus* : beaucoup de candidats se contentent de dire que c'est « la bijection réciproque du cosinus », sans réaliser que le cosinus n'est pas bijectif...

- $\rightsquigarrow$ Les dérivées des fonctions *arccosinus* et *arcsinus* ont réservé des surprises (des $\sqrt{1+t^2}$ ont remplacé le terme $\sqrt{1-t^2}$ dans l'expression des dérivées).

- $\rightsquigarrow$ En ce qui concerne l'intégration : le jury a noté une maîtrise fragile des outils de base (manipulation d'équivalents, changement de variable) pour prouver l'intégrabilité. Certains automatismes cachent provisoirement une incompréhension des concepts, qui se révèle assez rapidement à l'oral (que signifie la continuité en un point, l'intégrabilité sur un ouvert, etc...).

- $\rightsquigarrow$ Les formules de trigonométrie sont mal connues (voire pas du tout). Il en résulte que les candidats ne savent parfois pas quoi répondre quand il s'agit de déterminer un changement de variable adéquat.

- $\rightsquigarrow$ Le théorème des séries alternées est mal su, une hypothèse étant souvent manquante. La convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est souvent non sue et longue à justifier.

Algèbre

- $\rightsquigarrow$ Le mot *scindé* n'est pas bien compris. Nous rappelons que ce n'est pas équivalent à *scindé à racines simples.*

- $\rightsquigarrow$ La formule du produit matriciel est peu maîtrisée : il est difficile d'obtenir une expression des coefficients de M^2 ou la valeur de $tr\,(A^T A)$.

- $\rightsquigarrow$ La définition et les caractérisations des isométries et matrices orthogonales sont peu sues, en dehors de $A\,A^T = I_n$. Par exemple, le jury a obtenu peu de réponses rapides à la question : est-ce que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est orthogonale ?

- $\rightsquigarrow$ L'étude de la diagonalisabilité d'une matrice ayant une unique valeur propre est souvent longue, par exemple avec la matrice précédente.

- $\rightsquigarrow$ Le jury a relevé de nombreuses confusions entre *inversibilité* et *diagonalisabilité* : il n'est pas rare d'entendre qu'une matrice n'est pas diagonalisable car son déterminant est nul ou car elle a une colonne de zéros.

Géométrie

- Nous rappelons que les projections ne sont pas des isométries (sauf dans le cas où on projette sur l'espace E en entier).

- La réduction des coniques mal maîtrisée (les candidats prennent beaucoup de temps alors que ce devrait être un automatisme).

- Le jury a noté une confusion fréquente entre vecteurs tangents et normaux. Plusieurs candidats ont écrit par exemple que « $\nabla f(x,y,z)$ est LE vecteur TANGENT à la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$ ».

- La question « donner une paramétrisation (dans le plan muni d'un repère orthonormé) d'un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon R » a posé des problèmes à de nombreux candidats.

- Le programme de PTSI propose de voir le cercle de diamètre $[AB]$ comme l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$. Cependant, les candidats peinent à déterminer la nature du triangle ABM lorsque M se trouve sur ledit cercle.

Probabilités

- Les candidats sont en très grande majorité déboussolés devant un problème de dénombrement.

- Peu de candidats savent donner la définition d'une probabilité ou expliquer leur raisonnement de façon totalement rigoureuse.

- Le jury a noté une confusion entre *événement* et *probabilité* (des candidats les assimilant à l'intersection ou l'union de deux probabilités parfois).

- Parfois, le calcul est correct, mais le fond manque vraiment de maîtrise.

- De trop nombreux candidats, lorsqu'on leur demande l'inégalité de Markov, répondent qu'ils ignorent à quoi cela fait référence.

- Le jury a fréquemment relevé une interprétation erronée de l'inclusion d'événements.

- Le fait que la covariance de deux variables aléatoires indépendantes soit nulle ne semble pas bien connu.

- La détermination de la loi de la variable aléatoire donnant la somme de deux dés cubiques bien équilibrés et indépendants a plongé les candidats dans la perplexité.

- ⇝ De façon plus générale, la loi uniforme sur un univers fini n'est pas bien maîtrisée.

- ⇝ Le jury a noté une confusion fréquente entre la loi de Bernoulli et la loi binomiale.

- ⇝ Trop de candidats apprennent des recettes sans comprendre : en probabilités, on entend des réflexions du type « je connais trois formules : Bayes, probabilités totales et probabilités composées », suivies d'un choix au hasard dans les trois formules. De même, lors d'un lancer de pièces, trop de candidats répondent « binomiale », ou « géométrique » lorsqu'on cherche une loi, et si l'examinateur leur demande des précisions, alors ils proposent l'autre.