Rapport – Mathématiques A

Remarques générales

Le sujet comprenait deux exercices. L'exercice 1 portait sur les matrices unipotentes et faisait intervenir des méthodes classiques d'algèbre linéaire avec notamment de nombreuses notions de première année de classe préparatoire. L'exercice 2 portait sur des probabilités discrètes et couvrait largement le programme de probabilité des deux années.

Cette épreuve a globalement été bien traitée. Certains candidats ont correctement traité toutes les questions et obtenu la note maximale. Le premier exercice a été bien réussi par la majorité des candidats. Nous avons cependant constaté des lacunes sur certaines notions élémentaires, comme la définition d'un sous-espace vectoriel : rappelons que le programme des concours porte sur les deux années de classes préparatoires. Le deuxième exercice a été réussi par la majorité des candidats. Nous notons cependant un nombre important de candidats semblant avoir fait l'impasse sur les probabilités : l'exercice n'étant pas ou peu traité, les notions élémentaires du secondaire comme la loi binomiale n'étant pas sues.

Comme chaque année, nous insistons sur la présentation des copies : les résultats doivent être encadrés, les ratures évitées et les calculs non aboutis correctement barrés. Il en est de même pour la rédaction : les calculs doivent être justifiés, en particulier lorsque le résultat demandé est donné dans l'énoncé.
Il est demandé une expression et une orthographe correctes : une réponse ne devrait pas commencer par "Non, ce n'est pas un sous-espace vectoriel". On retrouve les erreurs fréquentes "lancé", "il réussis", "la pièce noir", "parmis", "le therme générale", "on conclue", "sous-espace vectorielle", "la matrice nul"... Il est demandé aux candidats de se relire et de faire un minimum d'effort : nombre de ces mots sont correctement orthographiés dans le sujet.
Un effort a été noté pour que les correcteurs distinguent bien N et $\mathcal{N}$.

L'usage des parenthèses est parfois mal maitrisé : certains candidats écrivent par exemple $\frac{n-1}{n} \times n-1$ au lieu de $\frac{n-1}{n} \times (n-1)$ (idem dans le calcul du polynôme caractéristique). Ce n'est pas au correcteur de deviner s'il doit y avoir une parenthèse. De même, on ne devrait pas voir $\dfrac{1}{x} \times -\ln(1-x)$ mais $\dfrac{1}{x} \times (-\ln(1-x))$ ou $-\dfrac{1}{x} \times \ln(1-x)$.

Enfin, nous avons vu des confusions sur les signes entre $=$, $\sim$, $\Leftrightarrow$. Il convient de réfléchir à la nature des objets manipulés.

Remarques particulières

Exercice 1

1. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Les opérations effectuées sur les lignes ou colonnes sont souvent omises. La règle de Sarrus n'est pas acceptée (elle n'est pas au programme). La réponse $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 1, 1\}$ a été souvent donnée ou alors les valeurs propres sont $\{1\}$. La notation $\left\{1_{(3)}\right\}$ bien que compréhensible n'est pas standard et doit être expliquée.

   (b) La réponse à cette question a peu souvent été convenablement donnée. De nombreux candidats pensent qu'il faut que le polynôme caractéristique soit scindé à racines simples ou que A soit symétrique pour que A soit diagonalisable. Certains candidats affirment même que la matrice est symétrique réelle pour utiliser le théorème spectral.

   (c) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Comme dans la première question, les opérations effectuées sur les équations sont souvent omises. Il est dommage que les candidats ne comparent pas le résultat obtenu avec ce qu'ils ont écrit à la question précédente (surtout ceux ayant conclu à "diagonalisable" et dans une moindre mesure, ceux n'ayant pas répondu). Un sous-espace propre réduit à $\{0\}$ devrait faire réagir les candidats.

(d) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Il fallait donner toutes les réponses et pas une seule. Les systèmes doivent se résoudre par équivalence.

(e) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Le fait que e_1 et e_2 se trouvent avec les questions précédentes a été globalement vu même si certains candidats ont refait le calcul. Il faut expliquer brièvement comment trouver e_3. Des erreurs de calcul pour ce dernier vecteur : le signe moins a été parfois oublié.

(f) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Un minimum d'explication est attendu. En particulier il fallait vérifier que la famille obtenue est une base : P n'est pas toujours inversible (les 3 colonnes sont dans $x + z = 0$ ou une colonne de 0...). On trouve aussi la matrice de f dans (e_1, e_2, e_3) (qui est parfois mal construite : transposée). On voit des calculs inutiles qui interrogent sur la compréhension que ces candidats ont du changement de base.

2. (a) Moins d'un tiers des copies a eu la note maximale à cette question. La définition d'un sous-espace vectoriel est souvent non sue. Lorsque c'est le cas, la base et la dimension sont parfois manquantes. La justification que la famille génératrice obtenue est libre est très souvent absente. Rappelons que la non colinéarité des 3 vecteurs est insuffisante.

   Il arrive que dans la base, on trouve des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et même des polynômes. Certains candidats affirment que $\dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = 3$.

   (b) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. L'écriture du produit de matrices "en triangle" est peu compréhensible sans aucun signe $=$: cette écriture ne devrait figurer qu'au brouillon. Il manque souvent la conclusion.

   (c) Cette question a été traitée par la majorité des candidats.

3. Dans cette question et la suivante, la majorité des candidats a travaillé avec des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ explicitées avec les coefficients (a, b, c). Il était souvent plus rapide et efficace de garder la notation $I + N$ avec $N \in \mathcal{N}$.

   (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. On voit souvent "de la même façon" on a un sous-espace vectoriel ou $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel comme combinaison linéaire de sous-espaces vectoriels, I étant souvent l'un des ces sous-espaces.

   Si $(U, V) \in \mathcal{U}^2$ on ne peut pas conclure que $U + \lambda V \notin \mathcal{U}$ (c'est vrai pour $\lambda = 0$). Erreur plus subtile : certains candidats justifient que $0 \notin \mathcal{U}$ car pour $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ on a $U \neq 0$ mais ce n'est pas suffisant pour conclure.

   (b) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Bien que la définition de la stabilité par produit ait été rappelée à la question 2 (b), certains candidats vérifient que $U^2 \in \mathcal{U}$.

   (c) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Un nombre important de candidats affirme que toute matrice triangulaire est inversible. Lorsque le déterminant est calculé, il est impératif de préciser qu'il est non nul pour conclure. De nombreux candidats calculent explicitement U^{-1}, ce qui n'était pas nécessaire. Certains affirment que $\det(I + N) = \det(I) + \det(N)$.

4. Quelques candidats n'ont pas compris que α et β n'étaient pas nécessairement des entiers naturels : on voit des récurrences sur l'un ou l'autre ou des "α fois".

(a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Quelques confusions entre B et une matrice U générale. Il faut finir les calculs : les résultats comme somme de trois matrices ou avec $\frac{4}{2}$ ne sont pas acceptables.

(b) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. De fréquentes erreurs de calculs (oubli du αb notamment).

(c) Moins d'un tiers des copies a eu la note maximale à cette question. De nombreuses "arnaques" : il fallait justifier par le calcul que le coefficient devant N^2 était celui attendu : l'égalité $\frac{\beta(\beta-1)}{2}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+\alpha\beta=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2}$ n'a rien d'évident. Beaucoup de candidats oublient le $\alpha\beta ac$ mais concluent quand même à l'égalité demandée.

Certains candidats renoncent à traiter la seconde égalité.

(d) Moins d'un tiers des candidats a correctement traité cette question. Une récurrence bien rédigée est attendue. Les raisonnements du style "on voit bien que", "on a les propriétés des puissances" ou similaires ne sont pas suffisants. Nous retrouvons comme chaque année des erreurs dans la rédaction des récurrences (souvent mal rédigées), par exemple la propriété est supposée vraie pour tout n dans l'hérédité. L'initialisation est parfois faite pour $n=0$ ce qui pose problème dans l'hérédité où on utilise $n=1$.

(e) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. La méthode est souvent non connue des candidats. Oubli fréquent de vérifier que I et N commutent. Le traitement des cas particuliers $n=0$ et $n=1$ ne sont pas toujours convaincants.

(f) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. De nombreuses méthodes intéressantes : utilisation de $U^{(1+(-1))}$, calcul de $UU^{(-1)}$ ou calcul explicite de U^{-1}. Quelques candidats prennent $n=-1$ dans les questions précédentes. La conclusion est souvent manquante.

5. (a) Moins d'un quart des candidats a correctement traité cette question. Il est indiqué d'utiliser la question 4 donc un calcul coefficient par coefficient n'est pas acceptable. Certains candidats parlent de $B^{\frac{1}{2}}$ qui n'a aucun sens, contrairement à $B^{(\frac{1}{2})}$. L'unicité a souvent été mal comprise : les candidats exprimant une unicité dans $\mathcal{U}$ et non dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (b) Moins d'un quart des candidats a correctement traité cette question. De nombreuses explications peu convaincantes : peu de candidats expriment la méthode pourtant classique de détermination d'une racine carrée.

Exercice 2

Comme dit précédemment, il semble qu'un grand nombre de candidats a fait l'impasse sur les probabilités. Environ 10% des copies ne traitent pas du tout cet exercice ou n'ont aucun point.

Partie 1

1. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Le support est souvent oublié, quand ce n'est pas la probabilité. La phrase "c'est une épreuve de Bernoulli donc... c'est une loi géométrique" est très souvent écrite mais c'est une réponse insuffisante : que compte-t-on ? Les expériences sont-elles indépendantes ?
2. Moins d'un tiers des candidats a correctement traité cette question, pourtant classique. De nombreuses affirmations du type $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 1}(T\geqslant n)\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(T=n)$, $\prod_{n=1}^{+\infty}q^n=0$ ou

encore $\mathbf{P}(T \geqslant 1) = 1 - \lim_{n\to+\infty} q^n$ sans explication.

Certains candidats se rappellent qu'on peut utiliser le théorème de continuité décroissante mais introduisent une suite d'événements qui n'est pas monotone. Même lorsque la suite est bien introduite, le calcul de la probabilité et la justification de la limite par le théorème ne sont pas faites.

Certains candidats introduisent une variable aléatoire égale au nombre de succès. Si l'on passe par la loi géométrique, il faut expliquer en quoi $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(T = n) = 1$ donne le résultat attendu.

3. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. On voit souvent n à la place de N.
   (b) Question souvent non traitée même dans les meilleures copies. De nombreux candidats affirment que la fonction a un maximum en $\frac{1}{2}$ en ayant uniquement $f'(\frac{1}{2}) = 0$. Un tableau de variation ou le signe de la dérivée est a minima attendu. De jolies méthodes dont celles recyclant les connaissances de seconde sur les paraboles "sourire" (ou comme ici "qui sont tristes").
   (c) Moins d'un quart des candidats a correctement traité cette question. La loi des grands nombres au programme ne donne pas immédiatement l'inégalité demandée : il fallait la reprouver à partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (dont l'orthographe a bien été maltraitée) Certains candidats mélangent les noms des inégalités de probabilités.

Partie 2

4. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Les explications doivent être claires et succinctes. Le sujet est parfois mal lu ou mal compris : si le joueur prend la pièce noire il ne reste pas $n-M$ pièces dans le sac. La définition de "loi" est souvent mal sue : certains candidats pensent qu'il faut reconnaitre une loi usuelle, d'où des lois de Bernoulli ou uniforme. Les expressions gain maximum et gain minimum sont ambigues : il pourrait y avoir d'autres valeurs entre les 2. Attention à l'emploi du "il" dont on ne sait pas toujours s'il se rapporte au joueur ou à l'organisateur.
   (b) Cette question a été traitée par la majorité des candidats.
5. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Le critère de d'Alembert est souvent malmené : oubli des valeurs absolues ou du passage à la limite. Des confusions entre le rayon de convergence et l'intervalle (ouvert) de convergence

   Quelques erreurs de signe dans la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ou confusions entre $\ln(x)$ et $\ln(1\pm x)$. La valeur en 0 est généralement omise.
6. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. La notion de probabilité conditionnelle a perturbé certains candidats qui sont revenus à la définition. On a parfois lu $\mathbf{P}(T = n)(A)$ au lieu de $\mathbf{P}_{(T=n)}(A)$: les candidats sont invités à soigner la position des indices et exposants.
   (b) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait. Cependant, la formule des probabilités totales est parfois non sue, la justification souvent oubliée ou erronée (indépendance, incompatibilité uniquement). Le système complet d'événements est parfois (T_n) ou encore $T(\Omega)$.
7. (a) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait. Les explications sont souvent compliquées, incomplètes (inclusion uniquement) ou erronées.
   (b) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.

(c) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait. Les candidats ayant traité cette question ont souvent considéré qu'il y avait deux formules différentes alors qu'il s'agit de la même, la différence provenant de la valeur de $\mathbf{P}(T = n)$.

8. (a) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait. Certains critères de comparaison nécessitent des séries positives, ce dernier point est régulièrement oublié.

   (b) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait. Beaucoup de candidats découpent la série sans justifier de la convergence des séries en jeu.

9. La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait. La question 9 (a) a souvent été mal réussie : la difficulté provenait du signe négatif de $\ln(p)$. Une justification des signes était attendue lors du calcul.

Partie 3

10. (a) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.

    (b) Question peu souvent correctement traitée. L'indépendance est souvent non citée ou alors le lemme des coalitions est cité à tort. Certains candidats parlent de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\mathbf{E}(XY) \leqslant \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.

    (c) Question peu souvent correctement traitée. Oubli (presque) systématique de la précision $X \geqslant 0$ pour utiliser l'inégalité de Markov, qui est donc appliqué à une variable aléatoire inadaptée.

    (d) La majorité des candidats ayant traité cette question l'ont correctement fait.

11. Question peu souvent correctement traitée. Quelques rares candidats ont bien compris et expliqué le problème et les résultats obtenus.

MATHEMATIQUES B

Présentation générale :
Le sujet de cette année se composait de quatre parties largement indépendantes représentant respectivement 2/7, 1/7, 2/7 et 2/7 du sujet :

- La première partie s'occupait de la diagonalisation de 2 matrices sans passer par le polynôme caractéristique ;
- La seconde partie s'intéressait aux courbes intégrales des solutions d'un système différentiel associé à l'une des 2 matrices de la première partie ;
- La troisième partie se concentrait plus particulièrement sur l'une des courbes précédentes et sur une surface de révolution la contenant ;
- Enfin, la dernière partie étudiait le projeté orthogonal de la courbe de la partie III sur la plan $(x0y)$.

Le sujet de cette année a particulièrement mis en évidence les difficultés des candidats à enchaîner les questions, produire une démonstration en plusieurs étapes sans être guidés, à choisir une méthode parmi plusieurs et à faire preuve d'initiative... compétences qui étaient davantage abordées dans ce sujet que les années précédentes.
Par contre, le nombre de copies extrêmement faibles où il n'y a quasiment rien de juste est en très forte diminution (de près de 40%).

Le sujet, plus court que celui des années précédentes, même s'il reste sans doute un peu long, a parfaitement permis de classer les candidats.

Il est envisagé pour les années suivantes de ne plus interroger systématiquement sur les 3 parties (algèbre linéaire ou bilinéaire, géométrie plane, géométrie dans l'espace) mais sur deux uniquement (différentes d'une année sur l'autre) de façon à fournir des sujets plus courts.

Présentation des copies :
La présentation des copies reste toujours insuffisante cette année : écriture indéchiffrable ou minuscule, copies couvertes de ratures, résultats non encadrés (à la règle !), questions ou parties non numérotées, style télégraphique, phrases sans sujet ni verbe, orthographe et règles de grammaire non respectées y compris lorsqu'il s'agit de recopier des termes de l'énoncé...
Nous avons bien souvent l'impression de lire des brouillons et non des copies rédigées.

Il est rappelé aux candidats que leurs copies sont destinées à être lues et que des points sont prévus dans le barème pour la présentation des copies.
Cette année, moins d'un candidat sur quatre a obtenu les points de présentation.

On trouve heureusement aussi des copies, très agréables à lire, où l'on suit sans aucune difficulté le raisonnement et les calculs du candidat. Ces copies sont valorisées.

Il est rappelé aux candidats que dans un sujet de géométrie, ils ne doivent pas hésiter à illustrer leurs réponses par un schéma.
Les candidats qui le font à bon escient sont récompensés.

Rédaction :
Quelques conseils de rédaction que nous aimerions voir respectés :

- Les notations de l'énoncé doivent être respectées.

Si les candidats ont besoin de notations qui ne figurent pas dans l'énoncé, ils doivent les définir et utiliser dans la mesure du possible des notations qui ne prêtent pas à confusion.

• De même, les consignes de l'énoncé doivent être respectées. Une réponse, même juste, qui ne respecte pas ces consignes ne peut pas être prise en compte.

• Tous les résultats doivent être justifiés. On trouve bien trop souvent des affirmations sans preuve.
Par ailleurs, quand un résultat est fourni par l'énoncé, il est impératif que le détail des calculs figure sur la copie afin de convaincre le correcteur qu'on ne cherche pas à le tromper ; les mentions « calculs faits au brouillon » ne sont pas acceptées.
Ces tentatives d'arnaque indisposent les correcteurs et sont sanctionnées.

• Les correcteurs apprécient que le candidat annonce quel est son objectif et encore plus que le candidat à l'issue de ses calculs, termine la question par une conclusion (qu'il encadre).

• Les candidats doivent réfléchir à la nature des objets mathématiques qu'ils manipulent. Ainsi, cela leur évitera de dériver une courbe ou d'écrire des égalités entre des objets de différentes natures.
Cette année, on note de nombreuses confusions entre $=$, $\Leftrightarrow$ et $\sim$ ainsi qu'entre $\{\varnothing\}$ et $\varnothing$.

• Enfin, les candidats ne doivent pas abuser des abréviations : vp, sep, ev, sev, par cc...

Enfin, concernant les produits de matrices, il est rappelé que les 3 matrices A, B et le produit AB doivent être écrites sur la même ligne, les unes derrières les autres, avec la présence d'un signe « $=$ » à l'endroit opportun. Toute autre écriture doit être utilisée au brouillon.

D'autres remarques concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Avant de passer à ce détail, on rappelle aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre et que, comme indiqué sur le sujet, la feuille de papier millimétré doit être rendue avec la copie (insérée au bon endroit et non reléguée à la fin de la copie, c'est encore mieux).

Première Partie.

1. Beaucoup de candidats oublient de démontrer que R est une matrice orthogonale (et non orthonormée) et se contentent de calculer le déterminant.
   L'axe de la rotation est une droite et non un vecteur.
   Le calcul de la trace a engendré de nombreuses erreurs... $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ est souvent devenu dans la conclusion $\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$: faute d'inattention ou certains candidats pensent-ils que la fonction arccos est paire ?
   Cette question (lorsqu'elle est complète) représente en moyenne deux pages de calculs. Il est donc impératif d'en faire la synthèse par une phrase de conclusion.
2. L'immense majorité des candidats a respecté la consigne demandant de faire figurer les étapes intermédiaires sur la copie.
   Malheureusement, ils ont été très nombreux à se lancer dans le calcul de R^{-1}, y compris parmi ceux qui ont répondu correctement à la question précédente, avec hélas peu de matrices R^{-1} correctes à l'arrivée. Il est rappelé aux candidats qu'il est conseillé de vérifier que RR^{-1} est bien égal à I avant de poursuivre.

3. Très peu de candidats ont fourni une réponse à cette question. Pourtant l'énoncé suggérerait de travailler avec des matrices diagonales et donc de travailler avec D. Il a été noté des confusions entre « composée » et « somme » et certains candidats ont cru, à tort, que la symétrie et la projection étaient associées à la même décomposition de $\mathbb{R}^3$ en somme directe.
   Des confusions également entre matrices symétriques et matrices de symétrie.
4. Ces deux questions ne nécessitaient aucun calcul, uniquement de réinvestir les résultats des questions 2 et 3.
   (a) L'énoncé excluait l'utilisation du théorème spectral et le calcul du polynôme caractéristique.
   Le produit de deux matrices diagonalisables n'est pas toujours diagonalisable...
   Pour une raison inconnue, certains candidats qui font correctement le lien avec D ne donnent que 2 valeurs propres en oubliant 0...
   (b) Certains candidats n'ont pas retrouvé le mot « homothétie », le rapport est parfois faux ou oublié.
5. (a) Question réussie par les 3/4 des candidats.
   Déterminer le polynôme caractéristique de B et les différents sous-espaces propres n'était pas exclu par l'énoncé, mais cette méthode n'était pas efficace.
   (b) Il était possible
   ◦ de calculer le déterminant (avec de très nombreuses erreurs de calcul, la plus fréquente étant $-2+1=\pm 3$) sans oublier de préciser qu'il était différent de 0.
   ◦ d'échelonner la matrice et de conclure en disant qu'elle était équivalente (et non semblable) à une matrice triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale car contrairement à ce qu'affirme un certain nombre de candidats, toutes les matrices triangulaires ne sont pas inversibles.
   ◦ déterminer le noyau de Q
   ◦ calculer Q^{-1} ou son polynôme caractéristique pour vérifier que 0 n'est pas valeur propre... méthodes possibles mais chronophages.
   (c) L'énoncé suggérait deux méthodes aux candidats, soit en s'inspirant de la question (a) et en démontrant que les 2 premières colonnes de Q étaient aussi des vecteurs propres de B, soit en exploitant la question (b) et en vérifiant que $QD = BQ$.
   Les correcteurs ont l'impression que de nombreux candidats n'ont pas vu ou compris que l'écriture $B = QDQ^{-1}$ était une diagonalisation de B... est-ce parce que la matrice « de passage » s'appelait Q ?
   A noter que d'autres méthodes respectant les consignes de l'énoncé ont également été proposées : recherche des deux valeurs propres manquantes à l'aide de la trace et le déterminant puis des sous-espaces propres, ou en exploitant les coefficients diagonaux de D, la recherche des noyaux de B et $B - Id$...
6. L'égalité des traces, déterminants et valeurs propres ne suffit pas.
   Il fallait dans cette question pour obtenir la totalité des points établir une relation de la forme $A = PBP^{-1}$, toutes les données nécessaires figuraient dans l'énoncé.
   On trouve régulièrement des candidats qui font le raisonnement... et qui n'écrivent pas la conclusion !

Deuxième Partie.

1. La très grande majorité des candidats démontre que F est un sous-espace vectoriel de... ce n'est que très rarement précisé et dans les faits, il s'agit presque toujours de $\mathbb{R}^3$ et non de l'espace vectoriel des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.
   Bases et dimensions sont assez peu données, la liberté de la famille génératrice rarement mentionnée et encore moins démontrée.
   Des confusions entre la dimension de l'espace vectoriel et le cardinal de la base.
2. Pour avoir les points de cette question, le calcul détaillé de $B\,f(t)$ devait figurer dans la copie, ce qui a été fait par l'immense majorité des candidats.
3. Question très peu traitée. Il existait pourtant une demi-douzaine de façon de la faire, en particulier en sachant reconnaitre une représentation paramétrique de plan.
   Les candidats ont généralement choisi de chercher un plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ et sont arrivés au résultat au prix de quelques simplifications par des termes pouvant s'annuler.
4. (a) Un candidat sur deux uniquement donne une réponse correcte à cette question qui n'était finalement qu'une question de cours...
   Attention : l'énoncé demandait d'exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, pas de donner les coordonnées de $\vec{u}$ dans cette base.

   (b) Cette question qui est pourtant posée (presque) tous les ans a été bien moins souvent traitée que d'habitude. Est-ce parce que, contrairement aux années précédentes, elle n'a pas été précédée par la demande de la formule de changement de base ?
   La plupart des candidats ayant répondu correctement ont choisi de calculer Q^{-1}, la réponse avait été donnée pour éviter ce calcul. Peut-être que les candidats n'ont pas osé s'en servir ?

   (c) De nombreux candidats évoquent le paramétrage $t \mapsto \left\{ \begin{array}{l} a\,\mathrm{ch}(t) \\ b\,\mathrm{sh}(\mathrm{t}) \end{array} \right.$ qui n'est pas le paramétrage d'une hyperbole mais uniquement celui de l'une des deux branches.
   La caractérisation par une équation du type $xy = a$ ne semble pas connue, les (rares) candidats qui l'établissent poursuivant avec la matrice de la forme quadratique associée. Par ailleurs celle-ci est dégénérée uniquement lorsque $a = 0$.

Troisième Partie.

1. Il n'est pas rare de rencontrer $\mathrm{e}^{-\ln(2)} = -2$... ainsi que des confusions entre la dérivée et le gradient
   Les représentations paramétriques ne sont pas toujours bien écrites, même sans prendre en compte qu'il est rarement indiqué où se trouve le paramètre.
   A noter que le paramètre est parfois $u \pm \ln(2)$... ce qui est correct mais semble montrer une confusion avec l'équation de la tangente d'une courbe d'équation $y = f(x)$.
   Quant aux équations cartésiennes, il est demandé aux candidats d'expliquer (brièvement) comment ils les obtiennent.
   Il est rappelé que dans l'espace, si $(a,\, b,\, c) \neq (0,\, 0,\, 0)$, $ax+by+zc = d$ est l'équation d'un plan même lorsque $c = 0$, pour une droite, il convient de donner 2 équations (3, il y en a une en trop...).

2. (a) A l'exception de certains candidats qui ne semblent pas comprendre l'écriture $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$, cette question est plutôt bien traitée, l'importance de $t \geqslant 0$ étant mise en évidence au moment opportun.

   (b) La courbe étant plane et la norne du vecteur vitesse invariante dans un changement de base orthonormée, il était donc possible d'utiliser la formule du cours vue dans le plan, chose que à été faite avec plus ou moins de réussite par la majorité des candidats... mais sans la justifier.
   Visiblement, le carré de la question précédente a posé problème aux candidats. Des candidats perdent des points bêtement en ne lisant pas attentivement l'énoncé : il fallait fournir un encadrement puis un équivalent (et non une limite).

   En ce qui concerne l'encadrement, le calcul des deux intégrales $\displaystyle\int_0^T \mathrm{e}^t\,dt$ et $\displaystyle\int_0^T (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})\,dt$ a posé problème : confusion primitive/intégrale ? mauvaise valeur de e^0 ? ou (mauvais) réflexe qui veut que les primitives s'annulent en 0 ? On obtient alors des encadrements où le minorant est plus grand que le majorant...
   Coté équivalents, on ne peut ni les « primitiver », ni les intégrer.
   La rédaction du théorème d'encadrement est à revoir.

3. (a) Les réponses à cette question posée (presque) tous les ans sont toujours très mal rédigées...

   (b) On a trouvé moins de plans passant par O ou de plans qui ne sont pas des plans que les années précédentes, peut-être parce que la question a été moins souvent abordée.
   Par contre, certains candidats ont absolument voulu faire apparaitre ln(2) dans cette équation... comme dans la question 1.
   Pour une équation comme celle-ci, il est demandé aux (futurs) candidats de fournir une réponse sous la forme « $ax+by+cz = d$ (ou $ax+by+cz+d = 0$) », une réponse de la forme « $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A) = 0$ » sera réservée (sauf indication contraire de l'énoncé) aux cas où il y a des paramètres.
   Il est par ailleurs conseillé de décomposer le calcul (calcul du gradient cas général puis au point demandé et enfin écriture de l'équation) et il est inutile de passer du temps à démontrer que la surface est régulière, le mentionner juste au point où cela est intéressant suffit.

   (c) Dans l'espace, les courbes doivent être définies par deux équations, les coordonnées des points comporter trois coordonnées...
   Les candidats ont généralement reconnu un cercle lorsque $\alpha^2 \geqslant 2$.
   Le cas $\alpha^2 < 2$ donne lieu à des formulations du type « pas possible », « n'existe pas »...
   L'ensemble vide se note $\varnothing$ et non $\{\varnothing\}$

   (d) L'axe proposé contient rarement les centres des cercles, et presque aucun candidat ne rappelle qu'il doit être orthogonal aux plans Π_α.

   (e) Des confusions avec les génératrices ou les parallèles et finalement uniquement 17% de bonnes réponses pour cette question de cours.

   (f) Très peu de réponses correctes...

(g) Peu de figures proposées compte-tenu des questions précédentes mais on peut noter quelques points positifs : le repère est bien orienté comme demandé (mais pas toujours d'origine Ω), les surfaces proposées sont bien des surfaces de révolution, et la partie vide entre $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ bien mise en évidence.

(h) Quelques réponses justes mais surtout des tentatives (non abouties, faute d'un axe correct) pour déterminer une équation de la surface obtenue en faisant tourner $\mathcal{C}$ autour de Δ.

Quatrième Partie.

1. Les tableaux sont rarement justifiés, il n'est d'ailleurs pas rare de voir des tableaux rectifiés (y compris celui de y) après le calcul des limites et si on peut se réjouir de voir que les candidats ont vérifié la cohérence de leurs résultats, il est bon de rappeler que les tableaux de signe se déterminent avec méthode (qui pouvait être ici de signaler que l'on avait la fonction $t \mapsto 2\mathrm{sh}(t)$).
   A noter que ce sont x et y qui sont dérivables et non $x(t)$ et $y(t)$.
   Le théorème des croissances comparées ne s'applique que dans des cas très précis et n'avait pas sa place ici.
2. La tangente est une droite et non un vecteur.
   Une phrase était la bienvenue pour indiquer au correcteur quel type de représentation avait été choisie pour cette tangente (paramétrique, cartésienne, point/vecteur...).
   L'expression ≪ la tangente est verticale ≫ est acceptée (et est même celle qui a la préférence de l'auteur du sujet...)
3. A part des erreurs des calculs et des normales à la place de la tangente, cette question est aussi bien sinon mieux réussie que la précédente (parce qu'elle laissait moins de liberté au candidat ?)
4. Une simple lecture du tableau de variation suffisait, ce qui a été fait par une majorité de candidats.
   Appliquer à cette question la même méthode qu'à la question suivante était maladroit (et souvent incomplet).
5. La méthode semble bien connue. Les candidats ont préféré refaire toute la démonstration plutôt que de gagner une étape en utilisant la réponse.
   La position relative de la courbe et la droite est souvent ommise ou affirmée. La présence d'un ≪ $+$ ≫ ou un ≪ $-$ ≫ sur la dernière limite calculée ne suffit pas car on demandait un résultat global et non local.
6. L'unité a été respectée et si on trouve rarement les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (qui doivent être de longueur 3), les axes sont bien gradués, la courbe a généralement une allure correcte aux voisinages des tangentes et asymptotes... Mais l'origine du repère est mal positionné au centre de la feuille : une lecture attentive des tableaux de variation de x et y doit indiquer au candidat la position la plus pertinente de O, soit ici, à gauche et décalé vers le haut...
   Par ailleurs, les tangentes et asymptotes sont des droites et dans la mesure où leur tracé est demandé explicitement, elles ne doivent pas être représentées uniquement localement.
   Dernier point : l'asymptote horizontale en $t = -\infty$ a posé problème à un certain nombre de candidats qui ont fait partir la courbe vers la gauche...

7. (a) Il n'est pas rare de trouver des distances négatives...
   La définition de $B(t)$ n'a pas toujours été bien comprise.

   (b) A moins de dire qu'il s'agit d'une série géométrique, la série $\sum \mathrm{e}^{-n}$ n'est pas une série de référence.
   Les critères de comparaison utilisés nécessitent des séries positives, ce qui n'est pas toujours dit.
   De plus, pour une série géométrique, on doit préciser $|q| < 1$ et non $q < 1$.

   (c) Question très difficile placée volontairement tout à la fin du sujet. Elle a été réussie par une vingtaine de candidats.
   Une représentation graphique de la zone concernée a été appréciée.
   Propositions les plus fréquentes : $d(t)$ tend vers 0 donc l'aire est finie... (revoir les intégrales divergentes...)
   Par analogie avec l'interprétation géométrique de l'intégrale vue en première année : $\displaystyle\int_0^{+\infty} d(t)\,dt$ converge... pour suivre cette piste, il aurait fallu une équation cartésienne de Γ de la forme $y = \varphi(x)$, ou en tournant la feuille, de la forme $x = \psi(y)$, ce qui marchait beaucoup mieux.
   Des candidats ont également proposé (sans parvenir à le mettre en place - sans doute faute de temps -) des majorations/minorations par des aires triangles ou des rectangles par analogie avec la méthodes des rectangles ou la comparaison intégrales/séries. Ce qui pouvait marcher... cela faisait intervenir des sommes partielles de la série de terme général $d(\ln(n))$ mais c'était assez délicat à mettre en place et à rédiger.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *correcteur* désignera une correctrice ou un correcteur.

Remarques générales

Le sujet de cette année avait pour fil directeur la constante d'Euler. Après un préambule consacré à une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, le problème faisait intervenir, en première partie, des développements en série entière, une étude de série numérique, des manipulations de sommes partielles. La seconde partie, plus difficile, faisait notamment appel à la fonction partie entière.

Cette épreuve a été globalement bien réussie. L'intégralité du sujet a été traitée dans de très bonnes copies, qui ont donc obtenu la note maximale de vingt sur vingt. A côté, il reste, comme chaque année, de très faibles copies, où même la détermination du signe d'une expression de la forme $\dfrac{x\,(x+1)}{(2\,x+1)^2}$ pose problème.

Nous alertons sur la présentation et l'écriture catastrophique d'un nombre croissant de copies. Entre torchon, ratures, manque de soin, nombreuses sont les copies où nous n'avons pas réussi à DECHIFFRER ce qui était écrit à certains endroits ! L'orthographe laisse toujours à désirer :

$\rightsquigarrow$ Le « graph » de la fonction.

$\rightsquigarrow$ Si « n est impaire », si « n est paire ».

$\rightsquigarrow$ « sont rayon ».

$\rightsquigarrow$ « La fonction est défini ».

Sans compter avec les sempiternelles abréviations : « le RDC », par exemple, et les expressions familières : « on sort tout ça », « en recollant tous ça » (orthographe textuelle), voire inventées : « la convergence grossière », etc ...

Nous rappelons également qu'il faut éviter les couleurs trop claires pour rajouter des informations textuelles sur la copie. Ces couleurs passent parfois mal lors de la numérisation, ce qui nuit à la lecture de la copie. Le mieux est de se cantonner à des couleurs classiques, noir, bleu, éventuellement rouge.

D'autre part, si les candidats ne semblent plus respectueux de l'ordre des questions (génération zapping ?), ils ne font aucun effort pour rendre leur copie accessible à la correction, il s'agit plutôt d'un jeu de piste : début de la copie Partie I, questions qui commencent à être dans le désordre, retour au Préambule ou avancées vers la Partie II sans préciser que c'est celle-ci qui est traitée, en mentionnant « b », mais sans préciser duquel. Voici un exemple parmi d'autres trouvé dans les copies :

1. (Il s'agit du Préambule)
2.
I. 1.
   3. (2 traitée en 1.)
   a.
   ii.
   b.
   e.
   d.
   3. (de la Partie II)
9. *ii*
   8. (de la Partie II)
5. *c.* (de la Partie I)
   2. (de la Partie II)
   f. (de la Partie I)

Comme les années précédentes, nous évoquons la bienveillance des correcteurs : il est fréquent d'accorder le point car le raisonnement semble correct malgré une erreur ou un problème logique. Néanmoins, nous rappelons qu'il ne faut pas non plus en abuser. Comme précisé dans le rapport de l'an dernier, il faut éviter de naviguer entre les questions, entre les parties. Prévoir une copie par partie afin de combler les éventuelles lacunes a posteriori. L'organisation des réponses fait partie de la présentation de la copie, qui est évaluée.

Nous souhaitons aussi revenir sur les fondamentaux du CALCUL :

i. Un calcul n'est pas une succession d'équivalences ne correspondant à rien, comme :

$$EXPRESSION\,1$$

$$\Leftrightarrow EXPRESSION\,2$$

$$\Leftrightarrow EXPRESSION\,3$$

$$etc...$$

ii. Les signes « = » doivent être alignés, et non former un parcours en zigzag de part et d'autre de la copie :

$$\begin{aligned} Expression\,1 &= Expression\,2 \\ &= Expression\,2 \\ &\vdots \\ &= Expression\,n \end{aligned}$$

iii. Il ne faut pas écrire deux symboles à la suite ; ainsi, une écriture de la forme « $a \times -b$ » est incorrecte.

Les correcteurs rappellent qu'il faut bien lire l'énoncé : des points sont perdus par l'oubli d'une question, des réponses hors sujet... En 5. a, Partie I, beaucoup de candidats n'ont pas lu correctement l'intitulé de la question, et ont cru qu'il fallait étudier la convergence d'une série entière. Trop de candidats cherchent aussi à duper le correcteur : le calcul débute bien, une difficulté est omise mais le candidat affirme avoir bien terminé son calcul, alors que des n_x se transforment en x comme par magie ou inversement. Insistons sur le fait que les correcteurs ne sont pas dupes ...

Plus généralement, nous sommes inquiets de voir nombre de candidats qui écrivent n'importe quoi sans même questionner la validité du raisonnement. Certaines notions élémentaires ne sont pas maîtrisées, comme la manipulation des sommes ou les changements d'indices (expressions de la forme $A(k) = \sum_{k=1}^{k} a_k$, $\int_k^{k+1} \sum_{k=1}^{n_x}$, changements d'indices où seule une des bornes change). Nous signalons également qu'<u>un changement d'indice n'est pas un changement de variable</u> (trouvé dans de très nombreuses copies).

Nous rappelons que les traits se tirent <u>**à la règle**</u>, et que les résultats doivent être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.

Remarques particulières

Préambule

1. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Très peu ont vu qu'il fallait reconnaître la limite du taux d'accroissement $\lim_{x \to x_1} \dfrac{Q(x)}{x - x_1}$, et ont donc calculé successivement $Q(x)$, $Q'(x)$, $Q'(x_1)$. D'autres, par contre, ont obtenu
$$a_1 = \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)}$$
et ont conclu au résultat sans avoir montré l'égalité $Q'(x_1) = (x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)$, où $Q'(x_1)$ apparaît sans aucune justification, quand on ne trouve pas $Q'(x) = (x - x_2)(x - x_3)$.

   Nous soulignons aussi la confusion entre les flèches « a pour image $\mapsto$ », et « tend vers $\to$ ».

2. La plupart des candidats ont obtenu les bonnes valeurs pour a_1, a_2 et a_3. Certains ne semblent pas avoir compris à quoi correspondaient ces coefficients, et ont donné des relations de la forme
$$a_1 = \frac{1}{(x+1)\,(x+\frac{1}{2})} \quad \text{etc...}$$

Partie I

1. Si cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats, beaucoup de copies n'ont pas donné le tableau de signes demandé par l'énoncé. Ou alors, celui-ci vient après la réponse, ou encore, quelques pages plus loin ...

   D'autres candidats se sont lancés dans une étude longue et fastidieuse des variations de la fonction $x \mapsto \dfrac{x\,(x+1)}{(2\,x+1)^2}$ (parfois jusqu'à 3 pages).

   Les correcteurs ont lu plusieurs dizaines de fois : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(2x+1)^2 > 0$, ce qui est faux.

   Nous soulignons que beaucoup de candidats ne semblent pas connaître la différence entre les symboles *réunion* $\cup$, et *intersection* $\cap$, et donnent donc comme réponse $\mathcal{D}_F =]-\infty, -1[\cap]0, +\infty[$ – soit, littéralement, l'ensemble vide $\emptyset$, ce qui est aussi un peu aberrant ... Certains ne veulent pas expliciter la réunion d'intervalles, et donnent donc comme réponse $\mathcal{D}_F = \mathbb{R} \setminus [0,1]$ (parfois même $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}/[0,1]$, mettant un *slash*-barre oblique du bas vers le haut, au lieu de l'anti-*slash*-barre oblique du haut vers le bas).

2. Très peu de candidats ont correctement traité cette question. La plupart se sont contentés d'écrire que, ≪ par composition de fonctions dérivables, F est dérivable ≫.

   Des candidats ont écrit que la fonction logarithme népérien était dérivable sur $\mathcal{D}_F$. Nous avons souvent trouvé sur les copies : ≪ par composition de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_F$, F est dérivable ≫. Ou encore mieux : ≪ F est dérivable par les théorèmes généraux ≫.

   D'autres candidats ne semblent toujours pas avoir compris la distinction entre continuité et dérivabilité, nous avons trouvé à maintes et maintes reprises : ≪ $f(x)$ est continue sur $\mathcal{D}_F$, donc $f(x)$ est dérivable ≫. Nous rappelons à ce propos que c'est f la fonction, et non $f(x)$.

3. La majeure partie des candidats a calculé correctement la dérivée. Certains ont voulu simplifier le calcul, sans faire attention que l'on ne peut pas écrire
   $F(x) = \ln x + \ln(x+1) - 2\,\ln(2\,x+1)$ pour tout x de $\mathcal{D}_F$.

4. (a) La majeure partie des candidats a déterminé le rayon de convergence de la série entière. Beaucoup de candidats ont voulu appliquer le résultat du programme concernant le critère de d'Alembert pour les séries entières. Certains écrivent : ≪ On utilise d'Alembert ≫. Quant à l'orthographe de Jean Le Rond d'Alembert, elle est parfois extrêmement écorchée : majuscule absente, ≪ Alambert ≫, quand ce n'est pas ≪ le théorème d'Ampère ≫ qui est cité.

   Dans cette question particulièrement, la rédaction se fait absente, voire inexistante, puisque l'on trouve, par exemple, sans aucune once de justification :

$$\frac{f(n)}{f(n+1)} \to 1$$

$$R = 1$$

   Certains calculent (visiblement) bien la limite de $\dfrac{f(n)}{f(n+1)}$ lorsque n tend vers l'infini, mais écrivent :

$$\lim \frac{f(n)}{f(n+1)}$$

   sans plus de précision.

(b) La plupart des candidats connaissent le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$. Toutefois, nous avons trouvé dans de nombreuses copies les réponses suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\,, \quad \text{ou encore} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n}$$

voire

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + o(x^n) = (SIC) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Certains donnent une réponse correcte, mais non simplifiée, comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2\,n+1}\, x^n}{n}$$

Beaucoup de copies donnent aussi des réponses où les sommes n'ont pas de bornes :

$$\sum \frac{x^n}{n}$$

Nous avons été par ailleurs très surpris que des candidats confondent rayon de convergence, et intervalle/domaine de convergence, puisque certains donnent comme réponse « $R =]-1, 1[$ ».

(c) *i.* Comme précédemment, la plupart des candidats connaissent le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$. Les réponses erronées sont, souvent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{n} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\,, \quad \text{ou encore} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n}}{n}$$

Nous avons aussi trouvé des sommes qui commencent à 1 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2\,n}$$

ou, à nouveau, des sommes sans bornes :

$$\sum x^{2\,n}$$

ii. La grande majorité des candidats a montré que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\dfrac{1}{1-x^2}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\dfrac{1}{1-x}$ et $\dfrac{1}{1+x}$. Certains ne vérifient pas leur réponse, et donnent

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = (SIC)\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x}$$

Plusieurs copies ont donné comme réponse deux écritures côte à côte :

$$\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1+x}\right)$$

laissant au correcteur le soin de choisir la bonne écriture. Cette démarche ne peut apporter aucun point. Certains candidats semblent ne pas savoir ce qu'est une combinaison linéaire et répondent avec le produit.

(d) La question précédente faisait ici référence au $d.\,ii$, puisqu'il fallait appliquer le théorème de primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence (intégration terme à terme). Bien évidemment, tout candidat ayant utilisé $4.\,d.\,i$, ou encore $4.\,b$, et ayant correctement justifié son résultat, a obtenu les points.
Si la grande majorité des candidats a répondu correctement, beaucoup se contentent de justifications inconséquentes : ≪ d'après le cours ≫, ≪ d'après un théorème du cours ≫(qui n'est évidemment pas cité).

Les candidats qui ont utilisé directement le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1-x)$ n'ont pas tous fait attention que l'on ne pouvait pas conclure directement pour le rayon de convergence : on sait juste que $R \geq 1$, il faut vérifier ensuite que l'on a bien $R = 1$.

(e) La plupart des candidats ont obtenu le développement en série entière attendu. Toutefois, un nombre non négligeable de copies ayant donné une réponse fausse à la question $4.\,b$ ont arrangé leurs résultats *magiquement* pour obtenir la réponse de l'énoncé. Le jury préférera toujours un candidat qui reconnaît ne pas aboutir, plutôt que ceux qui cherchent à l'entourlouper.

D'autres candidats écrivent le développement de la fonction $x \mapsto \ln(1-x^2)$ pour tout x dans $]-R, R[$, sans préciser que $R = 1$ (ils ne savent pas trop et ne veulent pas se mouiller), ce qui est important ici (puisqu'ils passent du développement de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ à celui de la fonction $x \mapsto \ln(1-x^2)$).

(f) Très peu de candidats ont donné une réponse correcte à cette question. Certains se sont visiblement noyés dans les calculs (manque de méthode), d'autres ont enchaîné les erreurs d'étourderie.

(g) Cette question, qui dépendait de la précédente, n'a été que peu traitée. Beaucoup de candidats ont donné des réponses aberrantes ($-\infty$,$+\infty$), alors que la série de terme général $\dfrac{1}{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}$ est clairement convergente.

5. (a) Beaucoup de candidats n'ont pas lu correctement l'énoncé : la série de terme général $f(n)$, pour $n \geq 1$, n'est pas la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}$. Ces candidats se sont lancés dans de longs calculs de rayon de convergence.

D'autre part, certains candidats ne font pas attention que, lorsque l'entier n tend vers l'infini, $\dfrac{1}{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}$ n'est pas du tout équivalent à $\dfrac{1}{n^3}$. Nous soulignons également que lorsqu'un critère d'équivalence sur les séries est utilisé, il est nécessaire de vérifier explicitement que les termes généraux sont de signe constant. Rappelons qu'il est tout à fait possible que deux séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ aient, en valeur absolue, des termes généraux équivalents en l'infini, alors que $\sum x_n$ converge et $\sum y_n$ diverge.

Nous avons constaté à cette question qu'il y a manifestement une confusion entre les notations de Landau « grand O » $\mathcal{O}$, et « petit o » o.

On s'aperçoit ici d'un manque d'esprit critique : on ne peut pas simultanément écrire en 4. *g*. que la limite vaut $+\infty$ et montrer en 5. *a*. que la série converge en 1. Les rares candidats ayant au moins remarqué l'incohérence entre les résultats, ou le lien entre les deux questions, ont été valorisés.

(b) Une grande partie des candidats a montré la relation demandée. Beaucoup l'ont fait par récurrence, ce qui n'était pas le plus simple. Dans certains cas, les réponses des candidats sont tellement tarabiscotées, illogiques, avec des allers-retours entre plusieurs possibilités, qu'elles n'ont plus grand chose de mathématique.

(c) Cette question n'a été traitée que par peu de candidats. Comme pour la question précédente, beaucoup ont voulu le faire par récurrence, ce qui ne simplifiait pas les choses.

Partie II

1. Hormis des non-réponses, ou des tracés très très fantaisistes, la majorité des candidats a correctement répondu à la question. Encore une fois, l'énoncé, qui demandait de donner **deux graphes distincts**, n'a pas été correctement lu, beaucoup de candidats ayant superposé ceux-ci. D'autre part, la partie entière n'était définie dans ce sujet que pour x positif, et la fonction $t \mapsto t - n_t$ seulement sur $[1, +\infty[$. C'est dommage, car pour un nombre non négligeable de copies, les courbes étaient correctes sur $\mathbb{R}^+$, mais incorrectes sur $\mathbb{R}^-$, confondant partie entière et troncature à l'unité.

   Rappelons que la courbe représentative d'une fonction dans un repère orthogonal ne peut jamais comporter de segment vertical : tout nombre de l'ensemble de définition admet une unique image. Ainsi, l'intersection de la courbe représentative d'une fonction avec une droite verticale ne peut avoir plus d'un point d'intersection... Cette erreur a été commise par un nombre très important de candidats.

   Enfin, lorsque du papier millimétré est fourni, il est recommandé de l'utiliser.

2. Une grande partie des candidats a montré la relation demandée. A nouveau, comme au 5. de la Partie I, beaucoup l'ont fait par récurrence.

   Certains ont voulu expliciter $A(k)$ sous la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_k} a_k$, sans faire attention qu'il fallait introduire un nouvel indice pour la sommation, par exemple, $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n_\ell} a_\ell$, car sinon, ils confondent les indices, et tout est faux ...

   Certains disent que le résultat est « obtenu par télescopage », sans autre forme de procès – ni de précision.

   D'autres font des « raisonnements par équivalence », ou les égalités sont remplacées par des symboles $\Longleftrightarrow$, ou alors, où ils partent du résultat escompté pour remonter les calculs et en déduire que c'est juste, puisque zéro est bien égal à zéro.

   Nous rappelons aussi **l'emploi obligatoire de délimiteurs** lorsque l'on écrit des expressions de la forme :

   $$\sum_{k=\text{indice inf}}^{\text{indice sup}} (\text{Expression}_1(k) + \text{Expression}_2(k))$$

   toute écriture de la forme

   $$\sum_{k=\text{indice inf}}^{\text{indice sup}} \text{Expression}_1(k) + \text{Expression}_2(k)$$

étant incorrecte.

3. Cette question, facile, a été traitée par la très grande majorité des candidats. Certains ont quand même voulu faire une démonstration par récurrence ... Nous avons également trouvé des sommes de 1 à x.

   Certains candidats se contentent d'affirmer l'égalité : il fallait au moins dire que n_x est un entier.

   D'autre part, trop de candidats ont, dans cette question, écrit que l'intégrale d'un produit était égale au produit des intégrales.

4. Cette question, plus délicate, portait sur une intégrale généralisée sur l'intervalle semi-ouvert $[k, k+1[$. Cette question a été bien traitée dans les bonnes copies.

   Cette question a été très classante.

5. Dans cette question, il fallait distinguer les cas $1 \leq x < 2$, et $x \geq 1$. Très peu de candidats l'ont vu, par contre, la majorité a bien appliqué la relation de Chasles pour obtenir le résultat attendu.

   Comme évoqué au début de ce rapport, certains candidats ne comprennent visiblement rien à ce qu'ils écrivent. Ainsi, nous avons vu à la question précédente le $A(k)$ sortir sans réelle justification, puis, ici, nous trouvons $A(k) \displaystyle\int_1^{n_x} h'(t)\,dt$.
   Comme la précédente, cette question a été très classante.

6. La relation $A(k) - A(k-1) = a_k$, pour $k \geq 2$, a été obtenue par la majorité des candidats. Certains ne savent pas manipuler les sommes, et ont besoin de tout développer.

7. (a) Une coquille s'était malheureusement glissée dans cette question. La très grande majorité des candidats l'a remarqué, et a obtenu le bon résultat.

   (b) Il fallait ici penser à décomposer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{n_x} A(t)\,h'(t)\,dt$ par la relation de Chasles, ce qui n'a pas été vu par tous les candidats. Beaucoup de candidats malhonnêtes ont, à la fin, remplacé n_x par x.

8. (a) Cette question, facile, a été traitée par la très grande majorité des candidats.

(b) De même que la précédente, cette question, facile, a été traitée par la très grande majorité des candidats. Certains n'ont pas pensé à l'intégration par parties, mais ont retrouvé le résultat à l'aide de celui donnant la dérivée d'un produit de fonctions.

(c) Pour cette question, où il suffisait de combiner les résultats précédents, nous avons trouvé de nombreuses réponses qui tiennent plus d'un brouillon/recherche d'une solution, que du calcul. Ce, sur parfois plus d'une page, où, en plus, le correcteur est censé (?) refaire une partie des calculs donnés par le candidat, et sort donc du cadre mathématique.

9. (a) *i.* Dans cette question, il suffisait de remarquer que, pour tout réel positif t,

$$0 \leq t - n_t < 1$$

Comme pour la question 5. *a*. de la Partie I, il y a manifestement une confusion entre les notations de Landau « grand O » $\mathcal{O}$, et « petit o » o. Déjà, de nombreux candidats ont voulu trouver une limite à $t - n_t$, lorsque t tend vers l'infini, pour en déduire que « $\dfrac{t - n_t}{t^2}$ était négligeable devant $\dfrac{t - n_t}{t^2}$ ». La définition de $f = O(g)$ en $+\infty$ n'est pas « la limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée en $+\infty$ ». D'ailleurs, ici, la limite n'existait pas. Les correcteurs ont souvent lu que $\lim\limits_{t \to +\infty} t - n_t \in [0, 1[$ (sans délimiteurs autour de $t - n_t$).

De nombreux candidats ont aussi confondu la notation « grand O » $\mathcal{O}$ et l'équivalence.

ii. Dans cette question, la très grande majorité des candidats a rappelé que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ était convergente. Quelques très bonnes copies ont bien justifié le fait que le caractère a priori impropre de l'intégrale aux points de discontinuité était de faussement impropre, et qu'il suffisait d'étudier la convergence en $+\infty$.

iii. Pour cette question, une grande partie des candidats ont utilisé la majoration du *i.*, et le fait que :

$$\lim_{N \to +\infty} \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} = 0$$

(b) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats.

(c) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats.

A côté, nous avons trouvé beaucoup de $\gamma = 1$, ainsi que de « 1 qui "entre" dans le $o(1)$ » ... La détermination de γ a été souvent insatisfaisante. Cela a pu être $\gamma = 1 - \int_1^N \frac{t - n_t}{t^2} dt$, qui n'est pas un nombre bien défini puisque dépendant de N, ou $\gamma = \int_1^{+\infty} \frac{t - n_t}{t^2}\, dt$, qui est faux, ou encore $\gamma = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{t - n_t}{t^2}\, dt$, mieux mais toujours faux.

10. Cette question n'a pas été traitée par tous les candidats, mais, hormis quelques aberrations, les réponses données sont justes.

11. Comme la précédente, cette question n'a pas été traitée par tous les candidats. Lorsque cela a été le cas, les candidats obtiennent la bonne réponse. Pour certains, qui avaient obtenu une valeur différente à la question 4. g. de la Partie I, le résultat qu'ils ont obtenu les a amenés à reprendre leur calcul de la question 4. g.