Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *correcteur* désignera une correctrice ou un correcteur.

Remarques générales

Le sujet de cette année avait pour fil directeur la constante d'Euler. Après un préambule consacré à une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, le problème faisait intervenir, en première partie, des développements en série entière, une étude de série numérique, des manipulations de sommes partielles. La seconde partie, plus difficile, faisait notamment appel à la fonction partie entière.

Cette épreuve a été globalement bien réussie. L'intégralité du sujet a été traitée dans de très bonnes copies, qui ont donc obtenu la note maximale de vingt sur vingt. A côté, il reste, comme chaque année, de très faibles copies, où même la détermination du signe d'une expression de la forme $\dfrac{x\,(x+1)}{(2\,x+1)^2}$ pose problème.

Nous alertons sur la présentation et l'écriture catastrophique d'un nombre croissant de copies. Entre torchon, ratures, manque de soin, nombreuses sont les copies où nous n'avons pas réussi à DECHIFFRER ce qui était écrit à certains endroits ! L'orthographe laisse toujours à désirer :

$\rightsquigarrow$ Le « graph » de la fonction.

$\rightsquigarrow$ Si « n est impaire », si « n est paire ».

$\rightsquigarrow$ « sont rayon ».

$\rightsquigarrow$ « La fonction est défini ».

Sans compter avec les sempiternelles abréviations : « le RDC », par exemple, et les expressions familières : « on sort tout ça », « en recollant tous ça » (orthographe textuelle), voire inventées : « la convergence grossière », etc ...

Nous rappelons également qu'il faut éviter les couleurs trop claires pour rajouter des informations textuelles sur la copie. Ces couleurs passent parfois mal lors de la numérisation, ce qui nuit à la lecture de la copie. Le mieux est de se cantonner à des couleurs classiques, noir, bleu, éventuellement rouge.

D'autre part, si les candidats ne semblent plus respectueux de l'ordre des questions (génération zapping ?), ils ne font aucun effort pour rendre leur copie accessible à la correction, il s'agit plutôt d'un jeu de piste : début de la copie Partie I, questions qui commencent à être dans le désordre, retour au Préambule ou avancées vers la Partie II sans préciser que c'est celle-ci qui est traitée, en mentionnant « *b* », mais sans préciser duquel. Voici un exemple parmi d'autres trouvé dans les copies :

1. (Il s'agit du Préambule)
2.

I. 1.
   3. (2 traitée en 1.)
   a.
   ii.
   b.
   e.
   d.
   3. (de la Partie II)

9. *ii*
   8. (de la Partie II)

5. *c.* (de la Partie I)
   2. (de la Partie II)
   f. (de la Partie I)

Comme les années précédentes, nous évoquons la bienveillance des correcteurs : il est fréquent d'accorder le point car le raisonnement semble correct malgré une erreur ou un problème logique. Néanmoins, nous rappelons qu'il ne faut pas non plus en abuser. Comme précisé dans le rapport de l'an dernier, il faut éviter de naviguer entre les questions, entre les parties. Prévoir une copie par partie afin de combler les éventuelles lacunes a posteriori. L'organisation des réponses fait partie de la présentation de la copie, qui est évaluée.

Nous souhaitons aussi revenir sur les fondamentaux du CALCUL :

i. Un calcul n'est pas une succession d'équivalences ne correspondant à rien, comme :

$$EXPRESSION\,1$$

$$\Leftrightarrow EXPRESSION\,2$$

$$\Leftrightarrow EXPRESSION\,3$$

$$etc...$$

ii. Les signes « = » doivent être alignés, et non former un parcours en zigzag de part et d'autre de la copie :

$$\begin{aligned} Expression\,1 &= Expression\,2 \\ &= Expression\,2 \\ &\vdots \\ &= Expression\,n \end{aligned}$$

iii. Il ne faut pas écrire deux symboles à la suite ; ainsi, une écriture de la forme « $a \times -b$ » est incorrecte.

Les correcteurs rappellent qu'il faut bien lire l'énoncé : des points sont perdus par l'oubli d'une question, des réponses hors sujet... En 5. a, Partie I, beaucoup de candidats n'ont pas lu correctement l'intitulé de la question, et ont cru qu'il fallait étudier la convergence d'une série entière. Trop de candidats cherchent aussi à duper le correcteur : le calcul débute bien, une difficulté est omise mais le candidat affirme avoir bien terminé son calcul, alors que des n_x se transforment en x comme par magie ou inversement. Insistons sur le fait que les correcteurs ne sont pas dupes ...

Plus généralement, nous sommes inquiets de voir nombre de candidats qui écrivent n'importe quoi sans même questionner la validité du raisonnement. Certaines notions élémentaires ne sont pas maîtrisées, comme la manipulation des sommes ou les changements d'indices (expressions de la forme $A(k) = \sum_{k=1}^{k} a_k$, $\int_k^{k+1} \sum_{k=1}^{n_x}$, changements d'indices où seule une des bornes change). Nous signalons également qu'<u>un changement d'indice n'est pas un changement de variable</u> (trouvé dans de très nombreuses copies).

Nous rappelons que les traits se tirent <u>**à la règle**</u>, et que les résultats doivent être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.

Remarques particulières

Préambule

1. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Très peu ont vu qu'il fallait reconnaître la limite du taux d'accroissement $\lim_{x \to x_1} \dfrac{Q(x)}{x - x_1}$, et ont donc calculé successivement $Q(x)$, $Q'(x)$, $Q'(x_1)$. D'autres, par contre, ont obtenu

$$a_1 = \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)}$$

   et ont conclu au résultat sans avoir montré l'égalité $Q'(x_1) = (x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)$, où $Q'(x_1)$ apparaît sans aucune justification, quand on ne trouve pas $Q'(x) = (x - x_2)(x - x_3)$.

   Nous soulignons aussi la confusion entre les flèches « a pour image $\mapsto$ », et « tend vers $\to$ ».

2. La plupart des candidats ont obtenu les bonnes valeurs pour a_1, a_2 et a_3. Certains ne semblent pas avoir compris à quoi correspondaient ces coefficients, et ont donné des relations de la forme

$$a_1 = \frac{1}{(x+1)\,(x+\frac{1}{2})} \quad \text{etc...}$$

Partie I

1. Si cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats, beaucoup de copies n'ont pas donné le tableau de signes demandé par l'énoncé. Ou alors, celui-ci vient après la réponse, ou encore, quelques pages plus loin ...

   D'autres candidats se sont lancés dans une étude longue et fastidieuse des variations de la fonction $x \mapsto \dfrac{x\,(x+1)}{(2\,x+1)^2}$ (parfois jusqu'à 3 pages).

   Les correcteurs ont lu plusieurs dizaines de fois : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(2x+1)^2 > 0$, ce qui est faux.

   Nous soulignons que beaucoup de candidats ne semblent pas connaître la différence entre les symboles *réunion* $\cup$, et *intersection* $\cap$, et donnent donc comme réponse $\mathcal{D}_F =]-\infty, -1[\cap]0, +\infty[$ – soit, littéralement, l'ensemble vide $\emptyset$, ce qui est aussi un peu aberrant ... Certains ne veulent pas expliciter la réunion d'intervalles, et donnent donc comme réponse $\mathcal{D}_F = \mathbb{R} \setminus [0,1]$ (parfois même $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}/[0,1]$, mettant un *slash*-barre oblique du bas vers le haut, au lieu de l'anti-*slash*-barre oblique du haut vers le bas).

2. Très peu de candidats ont correctement traité cette question. La plupart se sont contentés d'écrire que, « par composition de fonctions dérivables, F est dérivable ».

   Des candidats ont écrit que la fonction logarithme népérien était dérivable sur $\mathcal{D}_F$. Nous avons souvent trouvé sur les copies : « par composition de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_F$, F est dérivable ». Ou encore mieux : « F est dérivable par les théorèmes généraux ».

   D'autres candidats ne semblent toujours pas avoir compris la distinction entre continuité et dérivabilité, nous avons trouvé à maintes et maintes reprises : « $f(x)$ est continue sur $\mathcal{D}_F$, donc $f(x)$ est dérivable ». Nous rappelons à ce propos que c'est f la fonction, et non $f(x)$.

3. La majeure partie des candidats a calculé correctement la dérivée. Certains ont voulu simplifier le calcul, sans faire attention que l'on ne peut pas écrire $F(x) = \ln x + \ln(x+1) - 2\,\ln(2\,x+1)$ pour tout x de $\mathcal{D}_F$.

4. (a) La majeure partie des candidats a déterminé le rayon de convergence de la série entière. Beaucoup de candidats ont voulu appliquer le résultat du programme concernant le critère de d'Alembert pour les séries entières. Certains écrivent : « On utilise d'Alembert ». Quant à l'orthographe de Jean Le Rond d'Alembert, elle est parfois extrêmement écorchée : majuscule absente, « Alambert », quand ce n'est pas « le théorème d'Ampère » qui est cité.

   Dans cette question particulièrement, la rédaction se fait absente, voire inexistante, puisque l'on trouve, par exemple, sans aucune once de justification :

$$\frac{f(n)}{f(n+1)} \to 1$$

$$R = 1$$

   Certains calculent (visiblement) bien la limite de $\dfrac{f(n)}{f(n+1)}$ lorsque n tend vers l'infini, mais écrivent :

$$\lim \frac{f(n)}{f(n+1)}$$

   sans plus de précision.

(b) La plupart des candidats connaissent le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$. Toutefois, nous avons trouvé dans de nombreuses copies les réponses suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\,, \quad \text{ou encore} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n}$$

voire

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + o(x^n) = (SIC) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Certains donnent une réponse correcte, mais non simplifiée, comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2\,n+1}\, x^n}{n}$$

Beaucoup de copies donnent aussi des réponses où les sommes n'ont pas de bornes :

$$\sum \frac{x^n}{n}$$

Nous avons été par ailleurs très surpris que des candidats confondent rayon de convergence, et intervalle/domaine de convergence, puisque certains donnent comme réponse « $R =]-1, 1[$ ».

(c) *i.* Comme précédemment, la plupart des candidats connaissent le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$. Les réponses erronées sont, souvent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2\,n}}{n} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\,, \quad \text{ou encore} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2\,n}}{n}$$

Nous avons aussi trouvé des sommes qui commencent à 1 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2\,n}$$

ou, à nouveau, des sommes sans bornes :

$$\sum x^{2\,n}$$

ii. La grande majorité des candidats a montré que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\dfrac{1}{1-x^2}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\dfrac{1}{1-x}$ et $\dfrac{1}{1+x}$. Certains ne vérifient pas leur réponse, et donnent

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = (SIC)\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x}$$

Plusieurs copies ont donné comme réponse deux écritures côte à côte :

$$\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1+x}\right)$$

laissant au correcteur le soin de choisir la bonne écriture. Cette démarche ne peut apporter aucun point. Certains candidats semblent ne pas savoir ce qu'est une combinaison linéaire et répondent avec le produit.

(d) La question précédente faisait ici référence au $d.\,ii$, puisqu'il fallait appliquer le théorème de primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence (intégration terme à terme). Bien évidemment, tout candidat ayant utilisé $4.\,d.\,i$, ou encore $4.\,b$, et ayant correctement justifié son résultat, a obtenu les points.
Si la grande majorité des candidats a répondu correctement, beaucoup se contentent de justifications inconséquentes : ≪ d'après le cours ≫, ≪ d'après un théorème du cours ≫(qui n'est évidemment pas cité).

Les candidats qui ont utilisé directement le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1-x)$ n'ont pas tous fait attention que l'on ne pouvait pas conclure directement pour le rayon de convergence : on sait juste que $R \geq 1$, il faut vérifier ensuite que l'on a bien $R = 1$.

(e) La plupart des candidats ont obtenu le développement en série entière attendu. Toutefois, un nombre non négligeable de copies ayant donné une réponse fausse à la question $4.\,b$ ont arrangé leurs résultats *magiquement* pour obtenir la réponse de l'énoncé. Le jury préférera toujours un candidat qui reconnaît ne pas aboutir, plutôt que ceux qui cherchent à l'entourlouper.

D'autres candidats écrivent le développement de la fonction $x \mapsto \ln(1-x^2)$ pour tout x dans $]-R, R[$, sans préciser que $R = 1$ (ils ne savent pas trop et ne veulent pas se mouiller), ce qui est important ici (puisqu'ils passent du développement de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ à celui de la fonction $x \mapsto \ln(1-x^2)$).

(f) Très peu de candidats ont donné une réponse correcte à cette question. Certains se sont visiblement noyés dans les calculs (manque de méthode), d'autres ont enchaîné les erreurs d'étourderie.

(g) Cette question, qui dépendait de la précédente, n'a été que peu traitée. Beaucoup de candidats ont donné des réponses aberrantes ($-\infty$,$+\infty$), alors que la série de terme général $\dfrac{1}{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}$ est clairement convergente.

5. (a) Beaucoup de candidats n'ont pas lu correctement l'énoncé : la série de terme général $f(n)$, pour $n \geq 1$, n'est pas la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}$. Ces candidats se sont lancés dans de longs calculs de rayon de convergence.

D'autre part, certains candidats ne font pas attention que, lorsque l'entier n tend vers l'infini, $\dfrac{1}{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}$ n'est pas du tout équivalent à $\dfrac{1}{n^3}$. Nous soulignons également que lorsqu'un critère d'équivalence sur les séries est utilisé, il est nécessaire de vérifier explicitement que les termes généraux sont de signe constant. Rappelons qu'il est tout à fait possible que deux séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ aient, en valeur absolue, des termes généraux équivalents en l'infini, alors que $\sum x_n$ converge et $\sum y_n$ diverge.

Nous avons constaté à cette question qu'il y a manifestement une confusion entre les notations de Landau « grand O » $\mathcal{O}$, et « petit o » o.

On s'aperçoit ici d'un manque d'esprit critique : on ne peut pas simultanément écrire en 4. g. que la limite vaut $+\infty$ et montrer en 5. a. que la série converge en 1. Les rares candidats ayant au moins remarqué l'incohérence entre les résultats, ou le lien entre les deux questions, ont été valorisés.

(b) Une grande partie des candidats a montré la relation demandée. Beaucoup l'ont fait par récurrence, ce qui n'était pas le plus simple. Dans certains cas, les réponses des candidats sont tellement tarabiscotées, illogiques, avec des allers-retours entre plusieurs possibilités, qu'elles n'ont plus grand chose de mathématique.

(c) Cette question n'a été traitée que par peu de candidats. Comme pour la question précédente, beaucoup ont voulu le faire par récurrence, ce qui ne simplifiait pas les choses.

Partie II

1. Hormis des non-réponses, ou des tracés très très fantaisistes, la majorité des candidats a correctement répondu à la question. Encore une fois, l'énoncé, qui demandait de donner **deux graphes distincts**, n'a pas été correctement lu, beaucoup de candidats ayant superposé ceux-ci. D'autre part, la partie entière n'était définie dans ce sujet que pour x positif, et la fonction $t \mapsto t - n_t$ seulement sur $[1, +\infty[$. C'est dommage, car pour un nombre non négligeable de copies, les courbes étaient correctes sur $\mathbb{R}^+$, mais incorrectes sur $\mathbb{R}^-$, confondant partie entière et troncature à l'unité.

   Rappelons que la courbe représentative d'une fonction dans un repère orthogonal ne peut jamais comporter de segment vertical : tout nombre de l'ensemble de définition admet une unique image. Ainsi, l'intersection de la courbe représentative d'une fonction avec une droite verticale ne peut avoir plus d'un point d'intersection... Cette erreur a été commise par un nombre très important de candidats.

   Enfin, lorsque du papier millimétré est fourni, il est recommandé de l'utiliser.

2. Une grande partie des candidats a montré la relation demandée. A nouveau, comme au 5. de la Partie I, beaucoup l'ont fait par récurrence.

   Certains ont voulu expliciter $A(k)$ sous la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_k} a_k$, sans faire attention qu'il fallait introduire un nouvel indice pour la sommation, par exemple, $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n_\ell} a_\ell$, car sinon, ils confondent les indices, et tout est faux ...

   Certains disent que le résultat est « obtenu par télescopage », sans autre forme de procès – ni de précision.

   D'autres font des « raisonnements par équivalence », ou les égalités sont remplacées par des symboles $\Longleftrightarrow$, ou alors, où ils partent du résultat escompté pour remonter les calculs et en déduire que c'est juste, puisque zéro est bien égal à zéro.

   Nous rappelons aussi **l'emploi obligatoire de délimiteurs** lorsque l'on écrit des expressions de la forme :

$$\sum_{k=\text{indice inf}}^{\text{indice sup}} \left(\text{Expression}_1(k) + \text{Expression}_2(k)\right)$$

   toute écriture de la forme

$$\sum_{k=\text{indice inf}}^{\text{indice sup}} \text{Expression}_1(k) + \text{Expression}_2(k)$$

étant incorrecte.

3. Cette question, facile, a été traitée par la très grande majorité des candidats. Certains ont quand même voulu faire une démonstration par récurrence ... Nous avons également trouvé des sommes de 1 à x.

   Certains candidats se contentent d'affirmer l'égalité : il fallait au moins dire que n_x est un entier.

   D'autre part, trop de candidats ont, dans cette question, écrit que l'intégrale d'un produit était égale au produit des intégrales.

4. Cette question, plus délicate, portait sur une intégrale généralisée sur l'intervalle semi-ouvert $[k, k+1[$. Cette question a été bien traitée dans les bonnes copies.

   Cette question a été très classante.

5. Dans cette question, il fallait distinguer les cas $1 \leq x < 2$, et $x \geq 1$. Très peu de candidats l'ont vu, par contre, la majorité a bien appliqué la relation de Chasles pour obtenir le résultat attendu.

   Comme évoqué au début de ce rapport, certains candidats ne comprennent visiblement rien à ce qu'ils écrivent. Ainsi, nous avons vu à la question précédente le $A(k)$ sortir sans réelle justification, puis, ici, nous trouvons $A(k) \displaystyle\int_1^{n_x} h'(t)\, dt$.
   Comme la précédente, cette question a été très classante.

6. La relation $A(k) - A(k-1) = a_k$, pour $k \geq 2$, a été obtenue par la majorité des candidats. Certains ne savent pas manipuler les sommes, et ont besoin de tout développer.

7. (a) Une coquille s'était malheureusement glissée dans cette question. La très grande majorité des candidats l'a remarqué, et a obtenu le bon résultat.

   (b) Il fallait ici penser à décomposer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{n_x} A(t)\, h'(t)\, dt$ par la relation de Chasles, ce qui n'a pas été vu par tous les candidats. Beaucoup de candidats malhonnêtes ont, à la fin, remplacé n_x par x.

8. (a) Cette question, facile, a été traitée par la très grande majorité des candidats.

   (b) De même que la précédente, cette question, facile, a été traitée par la très grande majorité des candidats. Certains n'ont pas pensé à l'intégration par parties, mais ont retrouvé le résultat à l'aide de celui donnant la dérivée d'un produit de fonctions.

   (c) Pour cette question, où il suffisait de combiner les résultats précédents, nous avons trouvé de nombreuses réponses qui tiennent plus d'un brouillon/recherche d'une solution, que du calcul. Ce, sur parfois plus d'une page, où, en plus, le correcteur est censé (?) refaire une partie des calculs donnés par le candidat, et sort donc du cadre mathématique.

9. (a) *i.* Dans cette question, il suffisait de remarquer que, pour tout réel positif t,

$$0 \leq t - n_t < 1$$

Comme pour la question 5. *a.* de la Partie I, il y a manifestement une confusion entre les notations de Landau « grand O » $\mathcal{O}$, et « petit o » o. Déjà, de nombreux candidats ont voulu trouver une limite à $t - n_t$, lorsque t tend vers l'infini, pour en déduire que « $\dfrac{t - n_t}{t^2}$ était négligeable devant $\dfrac{t - n_t}{t^2}$ ». La définition de $f = O(g)$ en $+\infty$ n'est pas « la limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée en $+\infty$ ». D'ailleurs, ici, la limite n'existait pas. Les correcteurs ont souvent lu que $\lim\limits_{t \to +\infty} t - n_t \in [0, 1[$ (sans délimiteurs autour de $t - n_t$).

De nombreux candidats ont aussi confondu la notation « grand O » $\mathcal{O}$ et l'équivalence.

ii. Dans cette question, la très grande majorité des candidats a rappelé que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ était convergente. Quelques très bonnes copies ont bien justifié le fait que le caractère a priori impropre de l'intégrale aux points de discontinuité était de faussement impropre, et qu'il suffisait d'étudier la convergence en $+\infty$.

iii. Pour cette question, une grande partie des candidats ont utilisé la majoration du *i.*, et le fait que :

$$\lim_{N \to +\infty} \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} = 0$$

(b) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats.

(c) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats.

A côté, nous avons trouvé beaucoup de $\gamma = 1$, ainsi que de $\ll$ 1 qui "entre" dans le $o(1) \gg$ ... La détermination de γ a été souvent insatisfaisante. Cela a pu être $\gamma = 1 - \int_1^N \frac{t - n_t}{t^2} dt$, qui n'est pas un nombre bien défini puisque dépendant de N, ou $\gamma = \int_1^{+\infty} \frac{t - n_t}{t^2}\, dt$, qui est faux, ou encore $\gamma = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{t - n_t}{t^2}\, dt$, mieux mais toujours faux.

10. Cette question n'a pas été traitée par tous les candidats, mais, hormis quelques aberrations, les réponses données sont justes.

11. Comme la précédente, cette question n'a pas été traitée par tous les candidats. Lorsque cela a été le cas, les candidats obtiennent la bonne réponse. Pour certains, qui avaient obtenu une valeur différente à la question 4. g. de la Partie I, le résultat qu'ils ont obtenu les a amenés à reprendre leur calcul de la question 4. g.