MATHEMATIQUES B

Présentation générale :
Le sujet de cette année se composait de quatre parties largement indépendantes représentant respectivement 2/7, 1/7, 2/7 et 2/7 du sujet :

- La première partie s'occupait de la diagonalisation de 2 matrices sans passer par le polynôme caractéristique ;
- La seconde partie s'intéressait aux courbes intégrales des solutions d'un système différentiel associé à l'une des 2 matrices de la première partie ;
- La troisième partie se concentrait plus particulièrement sur l'une des courbes précédentes et sur une surface de révolution la contenant ;
- Enfin, la dernière partie étudiait le projeté orthogonal de la courbe de la partie III sur la plan $(x0y)$.

Le sujet de cette année a particulièrement mis en évidence les difficultés des candidats à enchaîner les questions, produire une démonstration en plusieurs étapes sans être guidés, à choisir une méthode parmi plusieurs et à faire preuve d'initiative... compétences qui étaient davantage abordées dans ce sujet que les années précédentes.
Par contre, le nombre de copies extrêmement faibles où il n'y a quasiment rien de juste est en très forte diminution (de près de 40%).

Le sujet, plus court que celui des années précédentes, même s'il reste sans doute un peu long, a parfaitement permis de classer les candidats.

Il est envisagé pour les années suivantes de ne plus interroger systématiquement sur les 3 parties (algèbre linéaire ou bilinéaire, géométrie plane, géométrie dans l'espace) mais sur deux uniquement (différentes d'une année sur l'autre) de façon à fournir des sujets plus courts.

Présentation des copies :
La présentation des copies reste toujours insuffisante cette année : écriture indéchiffrable ou minuscule, copies couvertes de ratures, résultats non encadrés (à la règle !), questions ou parties non numérotées, style télégraphique, phrases sans sujet ni verbe, orthographe et règles de grammaire non respectées y compris lorsqu'il s'agit de recopier des termes de l'énoncé...
Nous avons bien souvent l'impression de lire des brouillons et non des copies rédigées.

Il est rappelé aux candidats que leurs copies sont destinées à être lues et que des points sont prévus dans le barème pour la présentation des copies.
Cette année, moins d'un candidat sur quatre a obtenu les points de présentation.

On trouve heureusement aussi des copies, très agréables à lire, où l'on suit sans aucune difficulté le raisonnement et les calculs du candidat. Ces copies sont valorisées.

Il est rappelé aux candidats que dans un sujet de géométrie, ils ne doivent pas hésiter à illustrer leurs réponses par un schéma.
Les candidats qui le font à bon escient sont récompensés.

Rédaction :
Quelques conseils de rédaction que nous aimerions voir respectés :

- Les notations de l'énoncé doivent être respectées.

Si les candidats ont besoin de notations qui ne figurent pas dans l'énoncé, ils doivent les définir et utiliser dans la mesure du possible des notations qui ne prêtent pas à confusion.

• De même, les consignes de l'énoncé doivent être respectées. Une réponse, même juste, qui ne respecte pas ces consignes ne peut pas être prise en compte.

• Tous les résultats doivent être justifiés. On trouve bien trop souvent des affirmations sans preuve.

Par ailleurs, quand un résultat est fourni par l'énoncé, il est impératif que le détail des calculs figure sur la copie afin de convaincre le correcteur qu'on ne cherche pas à le tromper ; les mentions « calculs faits au brouillon » ne sont pas acceptées.

Ces tentatives d'arnaque indisposent les correcteurs et sont sanctionnées.

• Les correcteurs apprécient que le candidat annonce quel est son objectif et encore plus que le candidat à l'issue de ses calculs, termine la question par une conclusion (qu'il encadre).

• Les candidats doivent réfléchir à la nature des objets mathématiques qu'ils manipulent. Ainsi, cela leur évitera de dériver une courbe ou d'écrire des égalités entre des objets de différentes natures.

Cette année, on note de nombreuses confusions entre $=$, $\Leftrightarrow$ et $\sim$ ainsi qu'entre $\{\varnothing\}$ et $\varnothing$.

• Enfin, les candidats ne doivent pas abuser des abréviations : vp, sep, ev, sev, par cc...

Enfin, concernant les produits de matrices, il est rappelé que les 3 matrices A, B et le produit AB doivent être écrites sur la même ligne, les unes derrières les autres, avec la présence d'un signe « $=$ » à l'endroit opportun. Toute autre écriture doit être utilisée au brouillon.

D'autres remarques concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Avant de passer à ce détail, on rappelle aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre et que, comme indiqué sur le sujet, la feuille de papier millimétré doit être rendue avec la copie (insérée au bon endroit et non reléguée à la fin de la copie, c'est encore mieux).

Première Partie.

1. Beaucoup de candidats oublient de démontrer que R est une matrice orthogonale (et non orthonormée) et se contentent de calculer le déterminant.
   L'axe de la rotation est une droite et non un vecteur.
   Le calcul de la trace a engendré de nombreuses erreurs... $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ est souvent devenu dans la conclusion $\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$: faute d'inattention ou certains candidats pensent-ils que la fonction arccos est paire ?
   Cette question (lorsqu'elle est complète) représente en moyenne deux pages de calculs. Il est donc impératif d'en faire la synthèse par une phrase de conclusion.
2. L'immense majorité des candidats a respecté la consigne demandant de faire figurer les étapes intermédiaires sur la copie.
   Malheureusement, ils ont été très nombreux à se lancer dans le calcul de R^{-1}, y compris parmi ceux qui ont répondu correctement à la question précédente, avec hélas peu de matrices R^{-1} correctes à l'arrivée. Il est rappelé aux candidats qu'il est conseillé de vérifier que RR^{-1} est bien égal à I avant de poursuivre.

3. Très peu de candidats ont fourni une réponse à cette question. Pourtant l'énoncé suggérerait de travailler avec des matrices diagonales et donc de travailler avec D. Il a été noté des confusions entre « composée » et « somme » et certains candidats ont cru, à tort, que la symétrie et la projection étaient associées à la même décomposition de $\mathbb{R}^3$ en somme directe.
   Des confusions également entre matrices symétriques et matrices de symétrie.
4. Ces deux questions ne nécessitaient aucun calcul, uniquement de réinvestir les résultats des questions 2 et 3.
   (a) L'énoncé excluait l'utilisation du théorème spectral et le calcul du polynôme caractéristique.
   Le produit de deux matrices diagonalisables n'est pas toujours diagonalisable...
   Pour une raison inconnue, certains candidats qui font correctement le lien avec D ne donnent que 2 valeurs propres en oubliant 0...
   (b) Certains candidats n'ont pas retrouvé le mot « homothétie », le rapport est parfois faux ou oublié.
5. (a) Question réussie par les 3/4 des candidats.
   Déterminer le polynôme caractéristique de B et les différents sous-espaces propres n'était pas exclu par l'énoncé, mais cette méthode n'était pas efficace.
   (b) Il était possible
   ∘ de calculer le déterminant (avec de très nombreuses erreurs de calcul, la plus fréquente étant $-2+1=\pm 3$) sans oublier de préciser qu'il était différent de 0.
   ∘ d'échelonner la matrice et de conclure en disant qu'elle était équivalente (et non semblable) à une matrice triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale car contrairement à ce qu'affirme un certain nombre de candidats, toutes les matrices triangulaires ne sont pas inversibles.
   ∘ déterminer le noyau de Q
   ∘ calculer Q^{-1} ou son polynôme caractéristique pour vérifier que 0 n'est pas valeur propre... méthodes possibles mais chronophages.
   (c) L'énoncé suggérait deux méthodes aux candidats, soit en s'inspirant de la question (a) et en démontrant que les 2 premières colonnes de Q étaient aussi des vecteurs propres de B, soit en exploitant la question (b) et en vérifiant que $QD = BQ$.
   Les correcteurs ont l'impression que de nombreux candidats n'ont pas vu ou compris que l'écriture $B = QDQ^{-1}$ était une diagonalisation de B... est-ce parce que la matrice « de passage » s'appelait Q ?
   A noter que d'autres méthodes respectant les consignes de l'énoncé ont également été proposées : recherche des deux valeurs propres manquantes à l'aide de la trace et le déterminant puis des sous-espaces propres, ou en exploitant les coefficients diagonaux de D, la recherche des noyaux de B et $B - Id$...
6. L'égalité des traces, déterminants et valeurs propres ne suffit pas.
   Il fallait dans cette question pour obtenir la totalité des points établir une relation de la forme $A = PBP^{-1}$, toutes les données nécessaires figuraient dans l'énoncé.
   On trouve régulièrement des candidats qui font le raisonnement... et qui n'écrivent pas la conclusion !

Deuxième Partie.

1. La très grande majorité des candidats démontre que F est un sous-espace vectoriel de... ce n'est que très rarement précisé et dans les faits, il s'agit presque toujours de $\mathbb{R}^3$ et non de l'espace vectoriel des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.
   Bases et dimensions sont assez peu données, la liberté de la famille génératrice rarement mentionnée et encore moins démontrée.
   Des confusions entre la dimension de l'espace vectoriel et le cardinal de la base.
2. Pour avoir les points de cette question, le calcul détaillé de $B\,f(t)$ devait figurer dans la copie, ce qui a été fait par l'immense majorité des candidats.
3. Question très peu traitée. Il existait pourtant une demi-douzaine de façon de la faire, en particulier en sachant reconnaitre une représentation paramétrique de plan.
   Les candidats ont généralement choisi de chercher un plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ et sont arrivés au résultat au prix de quelques simplifications par des termes pouvant s'annuler.
4. (a) Un candidat sur deux uniquement donne une réponse correcte à cette question qui n'était finalement qu'une question de cours...
   Attention : l'énoncé demandait d'exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, pas de donner les coordonnées de $\vec{u}$ dans cette base.

   (b) Cette question qui est pourtant posée (presque) tous les ans a été bien moins souvent traitée que d'habitude. Est-ce parce que, contrairement aux années précédentes, elle n'a pas été précédée par la demande de la formule de changement de base ?
   La plupart des candidats ayant répondu correctement ont choisi de calculer Q^{-1}, la réponse avait été donnée pour éviter ce calcul. Peut-être que les candidats n'ont pas osé s'en servir ?

   (c) De nombreux candidats évoquent le paramétrage $t \mapsto \begin{cases} a\,\mathrm{ch}(t) \\ b\,\mathrm{sh(t)} \end{cases}$ qui n'est pas le paramétrage d'une hyperbole mais uniquement celui de l'une des deux branches.
   La caractérisation par une équation du type $xy = a$ ne semble pas connue, les (rares) candidats qui l'établissent poursuivant avec la matrice de la forme quadratique associée. Par ailleurs celle-ci est dégénérée uniquement lorsque $a = 0$.

Troisième Partie.

1. Il n'est pas rare de rencontrer $\mathrm{e}^{-\ln(2)} = -2$... ainsi que des confusions entre la dérivée et le gradient
   Les représentations paramétriques ne sont pas toujours bien écrites, même sans prendre en compte qu'il est rarement indiqué où se trouve le paramètre.
   A noter que le paramètre est parfois $u \pm \ln(2)$... ce qui est correct mais semble montrer une confusion avec l'équation de la tangente d'une courbe d'équation $y = f(x)$.
   Quant aux équations cartésiennes, il est demandé aux candidats d'expliquer (brièvement) comment ils les obtiennent.
   Il est rappelé que dans l'espace, si $(a,\, b,\, c) \neq (0,\, 0,\, 0)$, $ax+by+zc = d$ est l'équation d'un plan même lorsque $c = 0$, pour une droite, il convient de donner 2 équations (3, il y en a une en trop...).

2. (a) A l'exception de certains candidats qui ne semblent pas comprendre l'écriture $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$, cette question est plutôt bien traitée, l'importance de $t \geqslant 0$ étant mise en évidence au moment opportun.

   (b) La courbe étant plane et la norne du vecteur vitesse invariante dans un changement de base orthonormée, il était donc possible d'utiliser la formule du cours vue dans le plan, chose que à été faite avec plus ou moins de réussite par la majorité des candidats... mais sans la justifier.
   Visiblement, le carré de la question précédente a posé problème aux candidats.
   Des candidats perdent des points bêtement en ne lisant pas attentivement l'énoncé : il fallait fournir un encadrement puis un équivalent (et non une limite).

   En ce qui concerne l'encadrement, le calcul des deux intégrales $\displaystyle\int_0^T \mathrm{e}^t\,dt$ et $\displaystyle\int_0^T (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})\,dt$ a posé problème : confusion primitive/intégrale ? mauvaise valeur de e^0 ? ou (mauvais) réflexe qui veut que les primitives s'annulent en 0 ? On obtient alors des encadrements où le minorant est plus grand que le majorant...
   Coté équivalents, on ne peut ni les « primitiver », ni les intégrer.
   La rédaction du théorème d'encadrement est à revoir.

3. (a) Les réponses à cette question posée (presque) tous les ans sont toujours très mal rédigées...

   (b) On a trouvé moins de plans passant par O ou de plans qui ne sont pas des plans que les années précédentes, peut-être parce que la question a été moins souvent abordée.
   Par contre, certains candidats ont absolument voulu faire apparaitre $\ln(2)$ dans cette équation... comme dans la question 1.
   Pour une équation comme celle-ci, il est demandé aux (futurs) candidats de fournir une réponse sous la forme « $ax+by+cz=d$ (ou $ax+by+cz+d=0$) », une réponse de la forme « $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$ » sera réservée (sauf indication contraire de l'énoncé) aux cas où il y a des paramètres.
   Il est par ailleurs conseillé de décomposer le calcul (calcul du gradient cas général puis au point demandé et enfin écriture de l'équation) et il est inutile de passer du temps à démontrer que la surface est régulière, le mentionner juste au point où cela est intéressant suffit.

   (c) Dans l'espace, les courbes doivent être définies par deux équations, les coordonnées des points comporter trois coordonnées...
   Les candidats ont généralement reconnu un cercle lorsque $\alpha^2 \geqslant 2$.
   Le cas $\alpha^2 < 2$ donne lieu à des formulations du type « pas possible », « n'existe pas »...
   L'ensemble vide se note $\varnothing$ et non $\{\varnothing\}$

   (d) L'axe proposé contient rarement les centres des cercles, et presque aucun candidat ne rappelle qu'il doit être orthogonal aux plans Π_α.

   (e) Des confusions avec les génératrices ou les parallèles et finalement uniquement 17% de bonnes réponses pour cette question de cours.

   (f) Très peu de réponses correctes...

(g) Peu de figures proposées compte-tenu des questions précédentes mais on peut noter quelques points positifs : le repère est bien orienté comme demandé (mais pas toujours d'origine Ω), les surfaces proposées sont bien des surfaces de révolution, et la partie vide entre $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ bien mise en évidence.

(h) Quelques réponses justes mais surtout des tentatives (non abouties, faute d'un axe correct) pour déterminer une équation de la surface obtenue en faisant tourner $\mathcal{C}$ autour de Δ.

Quatrième Partie.

1. Les tableaux sont rarement justifiés, il n'est d'ailleurs pas rare de voir des tableaux rectifiés (y compris celui de y) après le calcul des limites et si on peut se réjouir de voir que les candidats ont vérifié la cohérence de leurs résultats, il est bon de rappeler que les tableaux de signe se déterminent avec méthode (qui pouvait être ici de signaler que l'on avait la fonction $t \mapsto 2\text{sh}(t)$).
   A noter que ce sont x et y qui sont dérivables et non $x(t)$ et $y(t)$.
   Le théorème des croissances comparées ne s'applique que dans des cas très précis et n'avait pas sa place ici.
2. La tangente est une droite et non un vecteur.
   Une phrase était la bienvenue pour indiquer au correcteur quel type de représentation avait été choisie pour cette tangente (paramétrique, cartésienne, point/vecteur...).
   L'expression « la tangente est verticale » est acceptée (et est même celle qui a la préférence de l'auteur du sujet...)
3. A part des erreurs des calculs et des normales à la place de la tangente, cette question est aussi bien sinon mieux réussie que la précédente (parce qu'elle laissait moins de liberté au candidat ?)
4. Une simple lecture du tableau de variation suffisait, ce qui a été fait par une majorité de candidats.
   Appliquer à cette question la même méthode qu'à la question suivante était maladroit (et souvent incomplet).
5. La méthode semble bien connue. Les candidats ont préféré refaire toute la démonstration plutôt que de gagner une étape en utilisant la réponse.
   La position relative de la courbe et la droite est souvent ommise ou affirmée. La présence d'un « + » ou un « − » sur la dernière limite calculée ne suffit pas car on demandait un résultat global et non local.
6. L'unité a été respectée et si on trouve rarement les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (qui doivent être de longueur 3), les axes sont bien gradués, la courbe a généralement une allure correcte aux voisinages des tangentes et asymptotes... Mais l'origine du repère est mal positionné au centre de la feuille : une lecture attentive des tableaux de variation de x et y doit indiquer au candidat la position la plus pertinente de O, soit ici, à gauche et décalé vers le haut...
   Par ailleurs, les tangentes et asymptotes sont des droites et dans la mesure où leur tracé est demandé explicitement, elles ne doivent pas être représentées uniquement localement.
   Dernier point : l'asymptote horizontale en $t = -\infty$ a posé problème à un certain nombre de candidats qui ont fait partir la courbe vers la gauche...

7. (a) Il n'est pas rare de trouver des distances négatives...
La définition de $B(t)$ n'a pas toujours été bien comprise.

(b) A moins de dire qu'il s'agit d'une série géométrique, la série $\sum e^{-n}$ n'est pas une série de référence.
Les critères de comparaison utilisés nécessitent des séries positives, ce qui n'est pas toujours dit.
De plus, pour une série géométrique, on doit préciser $|q| < 1$ et non $q < 1$.

(c) Question très difficile placée volontairement tout à la fin du sujet. Elle a été réussie par une vingtaine de candidats.
Une représentation graphique de la zone concernée a été appréciée.
Propositions les plus fréquentes : $d(t)$ tend vers 0 donc l'aire est finie... (revoir les intégrales divergentes...)
Par analogie avec l'interprétation géométrique de l'intégrale vue en première année : $\displaystyle\int_0^{+\infty} d(t)\,dt$ converge... pour suivre cette piste, il aurait fallu une équation cartésienne de Γ de la forme $y = \varphi(x)$, ou en tournant la feuille, de la forme $x = \psi(y)$, ce qui marchait beaucoup mieux.
Des candidats ont également proposé (sans parvenir à le mettre en place - sans doute faute de temps -) des majorations/minorations par des aires triangles ou des rectangles par analogie avec la méthodes des rectangles ou la comparaison intégrales/séries. Ce qui pouvait marcher... cela faisait intervenir des sommes partielles de la série de terme général $d(\ln(n))$ mais c'était assez délicat à mettre en place et à rédiger.