Rapport sur l'oral de Mathématiques I

Remarques générales

Dans ce qui suit, le mot *candidat* sera utilisé pour désigner une candidate ou un candidat, et de même *interrogateur* désignera une interrogatrice ou un interrogateur.

L'oral, qui dure 30 minutes (y compris la phase de vérification d'identité) est séparé en deux parties : 25 minutes sont consacrées à la résolution d'un exercice sans préparation, et le temps restant est consacré à une question de cours, sur un sujet différent de celui de l'exercice.

L'exercice proposé au candidat porte sur l'ensemble du programme des deux années de préparation (algèbre, analyse, probabilités et géométrie), et est de difficulté graduelle, les premières questions étant toujours très abordables. Les exercices sont répartis de façon équilibrée entre algèbre, analyse, probabilités, géométrie. Lorsqu'un deuxième exercice est proposé, il porte sur une autre partie du programme.

Les exercices font l'objet d'une concertation entre les membres du jury, qui veillent à ce que leurs difficultés soient comparables. Ces exercices présentent en général au moins trois ou quatre questions, la première, voire les deux premières, étant systématiquement faciles, leur solution n'excédant pas deux ou trois lignes. Donnons quelques exemples déjà cités dans les rapports précédents :

⇝ Tracer rapidement la courbe d'équation $y = x^3 - x$.

⇝ Déterminer selon la valeur du réel a le rang de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

⇝ Montrer que si la fonction réelle $x \longmapsto x^2 f^2(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, il en est de même de la fonction $x \longmapsto f^2(x)$.

- Déterminer une représentation paramétrique de la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Si X suit une loi géométrique de paramètre p et si $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\mathbb{P}([X \geq n])$$

Les exercices sont conçus ainsi pour mettre en confiance le candidat.

Le jury souhaite cette année insister sur les points suivants :

- Le niveau de cette année paraît un peu plus hétérogène que les années précédentes avec davantage de candidats très faibles qui ne connaissent pas des notions élémentaires (définition d'une fonction intégrable, développements en série entière usuels, trace d'un produit de matrices...).

- Certains candidats sont peu loquaces, ils ne jouent pas le jeu de l'oral. Cette attitude est préjudiciable.

- Le tableau est assez mal utilisé. Le candidat commence bien souvent en plein milieu, et efface sans demander des résultats intermédiaires qu'il aurait pu exploiter dans les questions suivantes.

- Il est inutile de demander à la fin de la planche comment l'oral s'est passé, ou quelles sont les réponses aux questions posées au cours de l'épreuve.

- Comme l'année dernière, beaucoup de candidats ont des tics de langage à l'oral :

  - « super » ;

  - « pas de souci » ;

  - « on est sur un exercice d'Algèbre » ;

  - etc...

- $\leadsto$ On a souvent l'impression que les candidats cherchent à appliquer des recettes toutes faites, sans les comprendre. Cela génère des confusions liées au fait qu'ils ne repèrent pas toujours que les situations abordées ne sont pas exactement celles étudiées en cours.

- $\leadsto$ On constate comme toujours un manque de recul sur ce qui est fait : donner une loi de probabilités, ce n'est pas nécessairement chercher parmi les lois usuelles, calculer une intégrale, cela ne veut pas obligatoirement dire qu'il faut faire une intégration par parties ...

- $\leadsto$ Nous avons rencontré beaucoup de fautes de langages, ainsi que des confusions fréquentes sur la nature des objets manipulés, surtout en probabilités.

- $\leadsto$ Nous avons noté une utilisation inappropriée du symbole $\Leftrightarrow$, qui apparaît plus comme un symbole de ponctuation qu'après un vrai raisonnement par équivalence (bien souvent inutile d'ailleurs).

- $\leadsto$ Le programme de première année n'est pas bien maîtrisé par un grand nombre de candidats (cf. commentaires suivants).

- $\leadsto$ Globalement, les compétences des candidats à mener un calcul, même simple, semblent diminuer. Il n'est pas rare de voir des candidats passer plus de dix minutes à essayer de dériver une fonction rationnelle, ou résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

- $\leadsto$ Peu de candidats pensent spontanément à effectuer un dessin pour expliquer une situation qui s'y prête ou guider leur intuition. Par contre, certains candidats ont fait de très jolis dessins, parfois bien colorés, et sur lequels ils sont revenus poour les enrichir au fur et à mesure du déroulement de l'exercice, ce qui a été très apprécié du jury. Autre point très positif, chez un petit nombre de candidats : la réponse à la question de cours « Pouvez-vous définir la courbure d'une courbe paramétrée ? », a été très convaincante.

- $\leadsto$ De manière générale, les hypothèses des théorèmes au programme ne sont pas suffisamment bien connues. La positivité de la variable aléatoire n'est que très rarement mentionnée pour l'inégalité de Markov. L'orthogonalité des vecteurs est parfois oubliée dans le théorème de Pythagore (!). Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme restent aussi très mystérieuses.

- $\leadsto$ On rencontre parfois aussi des théorèmes farfelus. Par exemple « l'intégrale d'une fonction continue est aussi continue », ou bien encore la « règle du sémaphore » sur le produit de matrices.

- $\leadsto$ Les notions issues du premier semestre du programme de PTSI sont parfois totalement oubliées. Peu de candidats sont parvenus à trouver une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$, par exemple. Il est aussi arrivé d'obtenir un PPCM de deux entiers naturels n et m qui soit strictement inférieur à n et à m...

- $\leadsto$ Les énoncés avec un quantificateur d'existence sont souvent mal compris. Il n'est pas rare que pour montrer un énoncé de la forme « montrer qu'il existe un entier k tel que la propriété $\mathcal{P}(k)$ soit vraie », le candidat propose une récurrence sur k en essayant de montrer que la propriété est vraie pour tout entier k.

Remarques particulières

Analyse

- $\leadsto$ Les formules de trigonométrie sont mal connues dans l'ensemble, de même que les primitives des fonctions usuelles.

- $\leadsto$ Le jury a noté des difficultés dans l'utilisation des fonctions trigonométriques réciproques (ensemble de définition, définition en elle-même, difficulté de manipulation).

- $\leadsto$ La manipulation des fonctions définies par des intégrales pose souvent problème :

  - $\leadsto$ Certains candidats essayent d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme à des fonctions de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

  - $\leadsto$ La vérification des hypothèses d'application du théorème de dérivation sous le signe somme prend souvent énormément de temps (et ceci, de façon souvent inutile).

  - $\leadsto$ Même lorsque la question porte sur le caractère *bien défini* de l'intégrale, il est habituel de voir des candidats tenter d'appliquer le théorème de continuité/dérivation sous le signe somme.

- $\leadsto$ Nous avons noté une confusion persistante entre polynômes et séries entières.

- $\leadsto$ Lorsqu'un résultat sur les équations différentielles est utilisé, il convient de correctement nommer le type d'équation rencontré. Est-ce une équation différentielle du second ordre, du premier ordre, linéaire, à coefficients constants ?

- $\rightsquigarrow$ Nous rappelons que a fonction *arccosinus* n'est pas la bijection réciproque de la fonction *cosinus.*

Algèbre

- $\rightsquigarrow$ Les candidats cherchent parfois à appliquer des théorèmes uniquement valables en dimension finie à des objets de dimension infinie. Typiquement, certains candidats ayant établi l'injectivité d'une application linéaire définie sur $C^0([a,b])$ concluent à son inversibilité.

- $\rightsquigarrow$ Certains candidats ont montré une incompréhension des outils utilisés. Écrire à plusieurs reprises au cours d'un même oral des calculs comme $u+1=0$, lorsque u est un endomorphisme, ou encore $X^2+2\,X+1=0$, lorsque X est un vecteur colonne, montre que la nature des objets utilisés n'est pas comprise.

- $\rightsquigarrow$ Nous rappelons qu'il est préférable de s'entraîner à reconnaître les identités remarquables : factoriser le polynôme $X^2-2\,X+1$ ne devrait pas nécessiter un passage par le discriminant.

Géométrie

- $\rightsquigarrow$ Les notions de géométrie vues en première année sont souvent mal connues : produit mixte, nombres complexes. Sur le produit mixte, au-delà de la formule, peu de candidat sont capables d'expliquer son intérêt et son interprétation géométrique. Sur les nombres complexes, beaucoup de candidats se précipitent en posant $z=x+i\,y$, avec x et y réels et ne pensent pas au point de vue géométrique sur les nombres complexes, pourtant bien utile.

- $\rightsquigarrow$ Nous soulignons le fait que beaucoup de candidats ne font pas de dessins ! On voit ainsi des candidats calculer des tangentes, normales, intersections, projetés... sans aucun dessin pour essayer de comprendre ce qu'ils font, ce qui est assez incroyable.

- $\rightsquigarrow$ En géométrie du plan, les interrogateurs ont été très surpris de voir qu'il était difficile pour les candidats de donner une condition nécessaire et suffisante sur les triplets $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $(a',b',c')\in\mathbb{R}^3$ pour que les droites d'équations respectives $a\,x+b\,y+c=0$ et $a'\,x+b'\,y+c'=0$ soient confondues.

- $\rightsquigarrow$ Nous rappelons que les projections ne sont pas des isométries.

Probabilités

- ⇝ Les compétences sont très variables. Si beaucoup de candidats semblent plutôt à l'aise avec les notions d'indépendance, d'incompatibilité et l'utilisation de la formule des probabilités totales, un nombre non négligeable de candidats effectue des raisonnements fondés sur leur intuition, en dépit de toute justification logique. Il n'est pas rare d'obtenir une justification avec les mains ou de obtenir aucune justification des calculs de probabilités effectués.

- ⇝ Les exercices de probabilités sont un peu une loterie pour nous : certains candidats sont très à l'aise et performants, mais d'autres ne savent rien faire, pas même reconnaître une loi binomiale.

- ⇝ Nous avons noté de grosses fautes de cours sur le chapitre de statistiques. Il a été quasiment impossible d'obtenir un énoncé correct de l'inégalité de Markov, par exemple.