Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

Le sujet avait pour fil directeur cette année la fonction gaussienne $f\ :\ t \mapsto e^{-t^2}$. Le Préambule la faisait apparaître comme solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, propice à des questions sur le programme de première année : études de fonctions, calculs de dérivées où interviennent des polynômes, démonstration par récurrence.

La première partie était consacrée à l'étude d'intégrales généralisées, de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, e^{-x^2}\, dx$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^n\, e^{-x^2}\, dx$, $n \in \mathbb{N}$, et s'achevait sur des questions d'algèbre euclidienne : produit scalaire et application du procédé de Gram-Schmidt pour la détermination d'une base orthonormale.

La seconde partie faisait intervenir des intégrales à paramètres, qui, par un changement de variable simple, se ramènent à des intégrales fonctions de leurs bornes. Là encore, on balayait le programme avec des questions concernant les séries et séries entières - exponentielle et théorème d'intégration terme à terme.

La dernière partie mettait en jeu des probabilités : loi binomiale, théorème de transfert, loi faible des grands nombres. L'objet était de montrer que la fonction gaussienne peut s'obtenir comme limite d'une suite de fonctions polynomiales, ce qui permettait de faire le lien avec la première partie.

Cette épreuve a été un peu moins bien réussie que les années précédentes. Il est probable que le confinement de Mars 2020 et l'arrêt des cours en présence ait impacté les candidats. Ceci étant, un point ressort tout particulièrement : **une moins bonne connaissance du cours**. Les candidats essayent de s'en sortir sans, se perdent en tentatives hasardeuses, inventent ou cherchent à noyer le poisson. On ne peut espérer réussir en Mathématiques sans connaître impeccablement son cours.

Les correcteurs ont relevé, en outre, beaucoup de problèmes de rigueur, ainsi qu'un manque de recul sur les résultats obtenus. Il n'est pas rare de trouver dans une copie un résultat à un endroit, et son contraire un peu plus loin, sans que cela ne semble déranger le candidat.

S'il y a eu quelques excellentes copies, beaucoup sont très faibles, et montrent que les notions élémentaires ne sont pas maîtrisées (il n'est pas rare de voir que l'intégrale d'un produit est le produit des intégrales, ou encore la variable d'intégration qui « sort » de l'intégrale).

De nombreux candidats ont pensé trouver une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ (souvent $x \mapsto \dfrac{-e^{-x^2}}{2\,x}$) au milieu de la copie ...

Les correcteurs ont trouvé beaucoup de problèmes logiques et de raisonnement (absence ou mauvaise utilisation d'implications et d'équivalents, proposition de récurrence indépendante de n ou supposée vraie « pour tout n » dans l'hérédité ...). La question 1 de la partie I est éloquente à ce sujet : peu de candidats ont compris qu'il fallait montrer une équivalence.

Nous pouvons insister sur la bienveillance des correcteurs : il est fréquent d'accorder le point car le raisonnement semble correct malgré une erreur ou un problème logique.

Plus généralement, le fait qu'il faille dire qu'une limite existe ou qu'une intégrale ou une série converge avant de faire des calculs semble inconnu de la majorité des candidats. Par exemple, l'intégration par parties est souvent faite avant de préciser que le crochet converge. Là encore, insistons sur la bienveillance du jury (si on pénalisait cela, la moyenne serait bien plus basse...)

Si un résultat est évident, cela veut dire qu'il peut être justifié en une ligne. Le jury préférera toujours la justification à une phrase contenant un des mots « évident », « trivial », « forcément », « nécessairement » (liste non exhaustive).

On constate encore un grand nombre de candidats n'ayant aucune maîtrise en probabilités, ne faisant pas la différence entre un événement et une variable aléatoire. La troisième partie est peu traitée.

En ce qui concerne la présentation, si elle est globalement convenable, elle n'est pas excessivement soignée non plus. Nous rappelons que les traits se tirent à la règle.

Remarques particulières

Préambule

1. De nombreux candidats donnent comme réponse $A\,e^{-x^2}$, sans préciser à quel ensemble appartient la constante A. Beaucoup ne donnent pas la fonction f comme cela est demandé dans l'énoncé. Soit c'est fait à la question suivante, soit pas du tout.

   Un nombre non négligeable de candidats semble avoir été perturbé par le fait que la variable est x et pensent qu'il s'agit d'une constante, en donnant une réponse du genre $f(t) = e^{-2\,x\,t}$, alors que la forme donnée est exactement celle du programme des classes de Mathématiques PTSI :

$$y' + a(x)\,y = b(x)$$

2. A cette question, où il fallait calculer des dérivées seconde et troisième, les correcteurs ont noté l'oubli classique : les candidats, majoritairement, ne précisent pas pourquoi la fonction est dérivable trois fois.

   D'autre part, nous rappelons qu'**il faut finir les calculs** : répondre

$$f(x) = \left(-8\,x^3 + 4\,x + 8\,x\right)\,e^{-x^2}$$

   ou encore pire et plus compliqué, n'est pas acceptable. Fait inquiétant : de trop nombreux candidats ne savent pas dériver un produit de fonctions dérivables. Plusieurs dizaines de copies contiennent les formules suivantes : « $f'(t) = -2\,t\,e^{-t^2}$ », « $f''(t) = 4\,t^2\,e^{-t^2}$ », « $f'''(t) = -\,8\,t^3\,e^{-t^2}$ ».

3. Très peu de candidats ont correctement justifié l'existence des maxima demandés :

$$\max_{t\,\in\,[0,1]} |f(t)| \quad , \quad \max_{t\,\in\,\mathbb{R}} |f'(t)| \quad \text{et} \quad \max_{t\,\in\,[0,1]} |f'(t)|$$

   Pour l'existence des maxima sur $[0, 1]$, le mot *segment* est bien souvent omis, ou oublié.

   Nous rappelons aussi que :

$$|f|' \neq |f'|$$

   Au lieu de vraiment étudier les fonctions, et de s'appuyer sur **un tableau de variations**, de nombreux candidats se lancent dans des pseudo-raisonnements, longs et confus. Ils affirment que les extremums coïncident avec les valeurs d'annulation des dérivées, ce qui n'est pas toujours le cas. Nous avons aussi trouvé, de nombreuses fois « f est décroissante sur $[0,1]$, et donc $\max f(t) = f(0)$ », sans préciser que f est positive.

De nombreux candidats écrivent que les maxima sont **nuls**, **infinis**, ou donnent **des valeurs négatives**, alors que c'est **une valeur absolue** qui est en jeu, sans que cela ne semble les perturber.

D'autres, toujours nombreux, affirment qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admet un maximum. Le fait que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in [0,1]$ est peu vérifié.

4. (a) Le théorème des accroissements finis a rarement été bien énoncé. On trouve souvent une division par $b-a$ sans avoir précisé que $b \neq a$. Les hypothèses exactes du théorème sont peu connues.

   Ce théorème a, en outre, souvent été confondu avec celui de Rolle.

   (b) Cette question a été rarement bien traitée. Les quantificateurs sont confondus les uns avec les autres : on ne demandait pas de trouver ε.

   D'autre part, le fait que le réel c dépende de x et y est rarement vu. De très nombreuses copies assurent que la question est une réécriture du caractère continu de la fonction, montrant ainsi la méconnaissance de la définition de la continuité.

5. Cette question n'a pas toujours été bien traitée. Peu de candidats vérifient que H_{n+1} est bien un polynôme.
   La preuve de la parité est rarement faite : c'est souvent une entourloupe.
   Pour le degré, on rappelle que, étant donné deux polynômes P et Q :

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

   avec égalité si les degrés sont distincts. Il serait bon de le préciser ici. Répondre que le résultat découle d'une « récurrence immédiate » après avoir vérifié les trois premiers cas est inadmissible.
   D'autre part, affirmer que le degré est n et la parité est celle de n sans donner de justification ne suffit pas.

6. Beaucoup de candidats donnent la bonne réponse, mais sans avoir précisé le premier terme de la suite.
   De très nombreux candidats confondent le terme dominant et le coefficient dominant, donnant ainsi une égalité entre $a\,(H_n)$ et $(-2)^n\ x^n$.

Partie I

1. Que d'horreurs dans cette question. Nous rappelons qu'avant d'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} g(t)\,dt$$

il faut vérifier si les intégrales convergent.
De nombreux candidats font un changement de variables sans parler de convergence.

En ce qui concerne le changement de variables en lui-même, trop de copies ne font pas les choses rigoureusement. Nous avons trouvé, à maintes reprises :

$$\int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} g(-t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} g(t)\,dt$$

ce qui ne laisse pas au correcteur la possibilité de savoir si le candidat sait vraiment faire le changement de variable comme attendu :

$$\int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} g(-t)\,dt = -\int_{+\infty}^{0} g(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} g(t)\,dt$$

C'est en général dans ces mêmes copies que l'on trouve ensuite, pour une fonction paire :

$$\int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt = -\int_{0}^{+\infty} g(t)\,dt$$

De nombreux candidats se contentent de dire que si la fonction g est impaire, alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t)dt = 0$.
Un argument vague de symétrie par rapport à l'axe des ordonnées n'est pas suffisant pour répondre rigoureusement.

Enfin, une erreur déjà vue les années précédentes :

« $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t)dt$ converge ssi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} g(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R}$ ».

2. Dans cette question, où il fallait étudier la convergence des intégrales I_n et J_n, nous rappelons que le critère de Riemann, ou « règle du $t^\alpha\, f(t)$ » n'est pas au programme : il faut détailler davantage le raisonnement.

Nous avons aussi trouvé de nombreux candidats qui écrivent que « $x^n\, e^{-x^2} \sim e^{-x^2}$ », souvent lu : « $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n\, e^{-x^2} = 0$, l'intégrale est donc faussement impropre en $+\infty$ ».

On voit d'ailleurs ensuite souvent écrit que « $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge ».

Enfin, il n'est pas évident du tout que $x^n\, e^{-x^2} = o\left(e^{-x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

3. Pour cette question, où on attendait une relation entre I_n et J_n, la réponse est souvent donnée sans preuve. Il fallait préciser que la fonction $x \mapsto x^n\, e^{-x^2}$ est de même parité que l'entier n.

4. Pour cette question, où il fallait calculer I_1, un certain nombre de candidats trouvent un résultat négatif, sans prendre de recul sur ce résultat. D'autres donnent zéro.

5. Il fallait ici déterminer, pour tout entier naturel n, à l'aide d'une intégration par parties, une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

   De très nombreux candidats se lancent dans des études de crochets, de limites : certes, mais dans la mesure où l'intégration par parties n'est pas explicitée, quel sens cela a-t-il ? Ou alors, cela demande un tel effort de reconstitution au correcteur que cela ne peut être considéré comme une réponse.

   Il faut, **au minimum**, que l'on trouve, explicitement :

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1}\, x^{n+1}\, e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} 2\, x^{n+1}\, x\, e^{-x^2}\, dx$$

   ou encore

$$I_n = \lim_{X \to +\infty} \left[\frac{1}{n+1}\, x^{n+1}\, e^{-x^2}\right]_0^{X} + \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} 2\, x^{n+1}\, x\, e^{-x^2}\, dx$$

   avec **une égalité**, et non **des expressions un peu partout sans lien entre elles**.

6. Dans cette question, où le résultat était donné dans l'énoncé, il fallait soigner la rédaction, par exemple en précisant que l'on multiplie par les termes pairs au numérateur et au dénominateur.

   Pour le calcul des intégrales I_{2k+1}, beaucoup de candidats ont fait des tentatives. Nombreux sont ceux qui écrivent, pour un entier k : « $\left(k + \dfrac{1}{2}\right)!$ » sans sourciller.

   Beaucoup de candidats, qui n'ont pas obtenu le résultat de convergence de la question 2., y font référence. Malheureusement, il n'est pas possible de gagner des points ainsi.

7. (a) De nombreux candidats ont ici affirmé que « $x^2\, P(x)\, e^{-x^2} \to 0$ par croissances comparées ». Il faut davantage de détails, par exemple, prendre un équivalent de $P(x)$ au voisinage de $+\infty$.

(b) Cette question, plus fine, n'a été que peu traitée.

De nombreux candidats pensent que « $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 0 \Rightarrow f = 0$ », sans même prendre en compte le signe de la fonction.
Quant à l'argument de continuité, il est peu énoncé.

Nous signalons aussi que « le théorème de la fonction nulle » n'existe pas.

Enfin, un nombre non négligeable de réponses affirment que :
« $x \mapsto Q(x)^2\, e^{-x^2}$ est une fonction paire ».

A noter : lorsque l'on a prouvé que $Q(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, il n'est pas nécessaire de mentionner l'infinité de racines pour conclure que $Q = 0$.

(c) Cette question, où il fallait montrer que l'application donnée était un produit scalaire, a été bien réalisée dans l'ensemble. Certains candidats donnent cependant le sentiment de mal maîtriser la différence entre une inégalité stricte et une inégalité large. Il n'est pas rare de lire « pour tout polynôme P, $\phi(P, P) > 0$ », pour prouver la positivité, puis, à la ligne suivante « $\phi(P, P) = 0 \Rightarrow P = 0$ », ou encore, écho à la question 7.b, que « si une fonction f est strictement positive, continue et d'intégrale nulle, alors f est la fonction nulle ».

Un nombre non négligeable de candidats confond linéarité et homogénéité. D'autres, encore, que la positivité signifie que, pour tous les polynômes P et Q : « $\langle P, Q\rangle \geq 0$ ».

(d) Cette question, où il fallait justifier $\langle H_0, H_1\rangle = 0$, a été bien traitée dans l'ensemble, malgré l'erreur consistant à dire que l'intégrale est nulle car la fonction est impaire, sans préciser la convergence.

A noter : un certain nombre de candidats n'ayant pas réussi correctement la question 3., ne peuvent se prévaloir du résultat de celle-ci.

(e) Dans cette question, où il fallait construire une base orthonormée du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par H_0, H_1 et H_2, les correcteurs ont trouvé tout et n'importe quoi.

Il fallait appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt (à orthographier correctement : ce n'est pas « Gramm Smith », « Gram Schmitt », entre autres) : si le procédé semble globalement connu des candidats, rares sont ceux qui expliquent ce qu'ils font. En gros, les copies sont pleines d'expressions et de calculs, de formules magiques, de coefficients non définis.
Il fallait, au minimum, soit déjà justifier que H_0, H_1 et H_2 étaient deux à deux orthogonaux, et donc expliquer qu'il suffisait de normer ces vecteurs, soit, rappeler que, à l'étape i du procédé, chaque vecteur est construit comme combinaison linéaire des vecteurs obtenus jusqu'à l'étape $i-1$, et du $i^{ième}$ vecteur de la base

de départ, et qu'il faut vérifier à la fois les conditions d'orthogonalité avec les vecteurs obtenus jusqu'à l'étape $i-1$, et normer le vecteur. En l'adaptant à la question posée, cela s'écrit assez simplement, plus en tout cas que les formules épouvantables trouvées sur maintes et maintes copies.

Les calculs associés sont d'ailleurs rarement bien menés jusqu'au bout.

Enfin, un nombre non négligeable de copies traite cette question, comme la précédente, avec un produit scalaire farfelu, en écrivant les polynômes sous forme de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et en utilisant ensuite le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{R}^3$.

Partie II

1. La parité de la fonction F a, le plus souvent, été correctement traitée.

   Nous rappelons toutefois qu'une fonction est **impaire**, et non « impair ».

2. Dans cette seconde question, où on attendait un changement de variable, de nombreux candidats divisent par x, sans préciser que celui-ci est non nul.

3. Les théorèmes concernant les intégrales à paramètre sont souvent mal utilisés, avec des dominations non justifiées. Ils sont parfois utilisés avec le paramètre x dans les bornes de l'intégrale.
   La dérivée partielle est rarement correcte (oubli du t^2 fréquent). Le lien avec la fonction f du préambule doit être expliqué (il y a une composition de fonction à détailler).
   Quelques rares candidats utilisent à profit la question précédente. Notons que le cas d'une intégrale à paramètre où f est de classe C^1 sur $I \times J$, où J est un segment, figure dans la colonne de droite du programme (intitulée « capacités et commentaires »). Il s'agit donc d'un résultat que les candidats doivent connaître, mais qu'ils doivent prouver à chaque utilisation, en vérifiant les hypothèses du théorème concerné. Si c'était un résultat de cours, il serait dans la colonne de gauche.

4. En ce qui concerne le calcul de

   $$\lim_{x \to +\infty} F(x)$$

   les correcteurs ont trouvé quelques horreurs, comme « $\displaystyle\int_{+\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du$ ».
   En regard, nous avons vu une écriture intéressante, de la forme « $F(x) = G(2\,x) - G(x)$ », mais, pour conclure, il aurait alors fallu justifier que la fonction G admet une limite en $+\infty$. Admettre le résultat de la question 7. pour en déduire la limite n'est pas acceptable.

5. Cette question, concernant la convergence de la série de terme général $F(2^n)$, n'a été que très peu traitée. On ne peut pas faire de calcul sur la somme de la série avant d'avoir prouvé sa convergence : il faut revenir aux sommes partielles.

6. (a) Peu de candidats ont donné l'expression de la dérivée de la fonction F. Ceux qui ont su utiliser la question 2. ont correctement répondu à la question. Nous avons noté des erreurs concernant la dérivée d'une fonction composée (oubli fréquent du 2).
   Certains candidats déduisent les variations de F uniquement à partir des points où sa dérivée F' s'annule, sans regarder le signe. A noter : la dérivée de F ne peut s'annuler en un réel dépendant de t, qui est une variable muette.

   (b) Pour résoudre : $F'(x) = 0$, nous avons souvent vu des équivalences du genre « $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \int f(x) \leq \int g(x)$ » (on notera, en prime, l'absence du dx).

   (c) On demandait ici d'étudier les variations de la fonction F. On rappelle qu'un tableau de variations doit être **complet**, avec les valeurs aux bornes, et les limites. D'autre part, de nombreux candidats, qui avaient montré l'imparité de la fonction, donnent des tableaux en parfaite contradiction avec cette même imparité ...

7. Cette question a été peu traitée, mais bien faite dans l'ensemble.

8. L'allure du graphe de la fonction F a été correctement donnée par les candidats ayant répondu à cette question. Nous avons quand même trouvé des courbes complètement fantaisistes, en contradiction avec le tableau de variation, des segments de droites, ...

9. (a) Concernant spécifiquement cette question, qui consistait à appliquer le théorème fondamental de l'analyse, les personnes écrivant pêle-mêle toutes les données sur F glanées dans l'énoncé n'ont pas obtenu les points de la question.

   (b) L'existence de la limite ℓ_G dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ n'a été que peu souvent donnée.

   (c) Nous avons trouvé quelques réponses fantaisistes pour l'existence de la limite. Une inégalité n'est pas conservée « en primitivant ». Nous rappelons également qu'une primitive est définie à une constante additive près, il n'est donc pas possible de conserver d'inégalité en passant aux primitives.

10. (a) Le développement en série entière de la fonction exponentielle semble connu. Toutefois, certains candidats le confondent encore avec un développement limité à l'ordre n

   (b) Le développement en série entière de la fonction F a, en général, été obtenu par les candidats ayant abordé la question. L'interversion série-intégrale est peu justifiée, ce qui impacte, par conséquence, la partie de la réponse concernant le rayon de convergence.

Partie III

1. Dans cette question, les calculs sont rarement faits : ils sont quelquefois corrects, mais pas toujours. Certains candidats passent, de façon magique, de

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n\,!}{(k-1)\,!\,(n-k)\,!}\, x^k\,(1-x)^{n-k}$$

(noter le $()k-1)\,!$), à

$$\sum_{k=1}^{n} x\, \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k-1)\,!}\, x^{k-1}\,(1-x)^{n-k-1}$$

D'autre part, si l'on souhaite appliquer des formules qui ne figurent pas au programme - « Formule du chef », « Formule des chefs », il faut les expliciter et les redémontrer.

Enfin, on ne peut pas parler de loi binomiale de paramètres (n, x) pour $x \in \mathbb{R}$.

2. Si la majeure partie des candidats ayant abordé cette question a reconnu la loi binomiale, encore faut-il en redonner la définition lorsque l'on y fait référence.

Nous avons lu dans quelques copies : « S_n suit une loi de Bernouille ».

3. (a) Les candidats ayant répondu à cette question ne justifient pas tous leur résultat : il fallait faire référence au théorème de transfert.

(b) Très peu de candidats ont correctement énoncé la loi faible des grands nombres. Nous avons trouvé un grand nombre de réponses fantaisistes, comme : « lorsqu'il y a un grand nombre, cela converge vers la même valeur ».

(c) Tous les candidats ayant compris que l'ensemble donné était $\mathbb{N}$ tout entier n'ont pas toujours su justifier correctement leur réponse. Certains parlent de « probabilité de l'événement certain », « événements incompatibles ».

(d) Seules les très bonnes copies ont correctement traité cette question. Quelques candidats, qui n'y sont pas arrivé, ont toutefois compris qu'il s'agissait de montrer que la fonction f était limite d'une suite de polynômes.