Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

L'épreuve était composée d'un problème d'algèbre linéaire, divisé en quatre parties indépendantes, qui portait principalement sur l'étude de matrices orthogonales et des isométries associées, et d'un exercice de probabilités.

Les trois premières parties du problème d'algègre linéaire comportaient des questions très classiques que tout étudiant de CPGE a dû faire des dizaines de fois. Nous nous attendions à ce que la majorité de ces questions soient traitées correctement par beaucoup de candidats, cela n'a malheureusement pas été le cas avec beaucoup de copies dont la vacuité ou l'ineptie sont particulièment inquiétantes. La dernière partie du problème ou l'exercice de probabilités étaient de difficulté supérieure afin de valoriser les tout meilleurs candidats.

Problème d'algèbre linéaire

L'objectif principal de ce problème était de démontrer que l'ensemble des réflexions de $\mathbb{R}^d$ engendre le groupe des isométries. ce point était l'objet de la toute dernière partie, les trois premières parties étant consacrées à l'étude de cas particuliers.

Partie I.

Le but de cette partie était l'identification d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite dans un espace de dimension 3 à partir de sa matrice dans une base (non adaptée). Il s'agissait donc de vérifier que la matrice était bien orthogonale, de diagonaliser cette matrice puis d'identifier l'isométrie en question. Les candidats étaient largement guidés dans cette étude afin en particulier d'éviter des calculs fastidieux.

1. Dans un premier temps, il faut vérifier que la matrice est orthogonale. Cela nécessite malheureusement de connaître la définition de cette notion, ce qui semble déjà une tâche insurmontable pour beaucoup de candidats ! Comment peut-on espérer réussir à traiter quoi que ce soit si les définitions de base ne sont pas maîtrisées ?

2. Nous demandions dans cette question de trouver les éléments propres de la matrice (valeurs propres, sous-espaces propres) en faisant tout d'abord remarquer que la matrice était diagonalisable car symétrique, que ses valeurs propres étaient -1 ou 1 car orthogonale et que ses sous-espaces propres étaient orthogonaux entre eux.

   Il s'agit d'une question très standard que tout candidat est censé savoir faire sans aucun problème. Elle a pourtant déjà été très sélective avec de nombreux candidats n'étant pas capables d'obtenir les sous-espaces propres à la fin. Mentionnons, outre les nombreuses erreurs de calcul dans la résolution de systèmes linéaires, les fautes les plus courantes :

   - $\rightsquigarrow$ Un polynôme caractéristique scindé ne suffit pas à dire que la matrice est diagonalisable.

   - $\rightsquigarrow$ Il faut faire attention aux objets manipulés ! Des sous-espaces propres ne constituent pas une base !

   - $\rightsquigarrow$ Si la matrice est inversible, 0 ne peut pas être valeur propre.

   - $\rightsquigarrow$ Inutile de calculer le polynôme caractéristique quand on sait déjà que les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1.

3. Enfin, il fallait identifier l'isométrie associée à la matrice initiale. La description des isométries du plan et de l'espace à partir de leurs éléments propres sont explicitement au programme. Nous attendons donc à obtenir la nature de l'isométrie (rotation, symétrie,...) ainsi que ses caractéristiques (plan de symétrie, axe de la rotation, angle de la rotation,...). Peu de candidats sont en mesure d'extraire ces informations à partir de la diagonalisation précédente.

Partie II

Le but de cette partie était de montrer qu'une involution était toujours diagonalisable (sans utiliser les polynômes annulateurs) et qu'il s'agissait d'une isométrie si et seulement si les sous-espaces propres étaient orthogonaux.

Le début de la partie a plutôt été bien traité (même si la rédaction pour montrer que l'application était bijective laisse parfois à désirer). La décomposition d'un vecteur quelconque comme somme d'un vecteur propre associé à 1 et d'un vecteur propre associé à -1 (décomposition donnée) a donné satisfaction. Le fait que les 2 sous-espaces propres étaient en somme directe a été raisonnablement traité même si certains affirment sans démonstration que la décomposition est unique ou que les dimensions de ces sous-espaces se somment à n. Le fait que ces sous-espaces soient supplémentaires entraîne la diagonalisibilité de l'application est également connu.

En revanche, démontrer l'équivalence finale a été très difficile, beaucoup de candidats semblant incapables de mener à bien un raisonnement rigoureux.

Partie III

Nous considérions ici un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ (de dimension 2) pour étudier la symétrie orthogonale par rapport à F. Enfin, il fallait écrire cette symétrie comme composée de deux réflexions.

1. Dans un premier temps, nous demandions de vérifier que F était un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Question basique qui consitue l'un des premiers exercices sur les espaces vectoriels en première année. Quelle ne fut pas notre surprise de constater que cette question a posé pas mal de problème à nombre de candidats ! Nous ne pouvons même pas incriminer la crise du COVID-19 puisqu'il s'agit d'un thème abordé l'année précédente. Là encore beaucoup de confusion entre espace vectoriel, application linéaire,... Les objets manipulés ne sont pas du tout maîtrisés.

   Signalons aussi qu'affirmer que l'ensemble est stable par combinaison linéaire ne suffit pas, il faut le vérifier.

2. Nous cherchions ensuite une base orthonormée de F puis de $F^{\perp}$, un premier vecteur pour chaque sous-espace étant donné. Là aussi, beaucoup de mauvaises réponses : bien souvent, le deuxième vecteur de la base de F était pris orthogonal au premier mais n'appartenait pas à l'ensemble F. Pour montrer qu'un vecteur appartenait à $F^{\perp}$, seule l'orthogonalité par rapport au 1er vecteur de la base de F était vérifiée. Signalons aussi une confusion très fréquente entre orthogonal de F et complémentaire.

3. Nous demandions d'écrire la matrice de la symétrie orthogonale dans la base canonique. Cette question a été très difficile, avec déjà une confusion étonnante entre la matrice de passage vers la base précédemment obtenue et la matrice de la symétrie. Très peu de candidats ont écrit la matrice de la symétrie dans la base de diagonalisation obtenue à la question précédente, et encore moins ont mené les calculs de changement de base à terme.

4. La dernière question consistait (à partir de la matrice diagonale) à écrire la symétrie comme composée de deux réflexions. Bien que peu difficile, cette question n'était pas guidée et a donc été très peu traitée par les candidats (fallait-il déjà avoir obtenu

la matrice en question).

Partie IV

Cette partie était plus abstraite bien que largement guidée. Il s'agissait de démontrer que, dans un espace de dimension finie n, toute isométrie pouvait s'écrire comme composée de réflexions, et que le nombre de réflexions nécessaires était inférieur à la co-dimension du sous-espace des vecteurs fixes. La démonstration s'effectue par récurrence sur cette co-dimension.

Cette partie était plus délicate car moins calculatoire que les précédentes et demandait d'être capable de mener des raisonnements mathématiques abstraits. Même si les arguments attendus étaient très simples, la rédaction et la rigueur mathématique de la plupart des candidats ne permettent pas de répondre de manière satisfaisante à ce genre de questions. Les notions d'hypothèse, de conclusion ou d'implication semblent très floues pour beaucoup.

Signalons également que la relation

$$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$$

n'est pas le théorème du rang. Même si nous n'avons pas sanctionné cette confusion, cela reste très désagréable à lire.

Exercice de probabilités

Le but de cet exercice était d'obtenir la probabilité pour que dans un jeu de pile ou face (non équilibré), le joueur n'obtienne jamais une fortune positive. Il s'agissait d'un exercice délicat car nécessitant de manipuler de faọn fine le formalisme probabiliste et les événements pour obtenir la propriété de Markov pour une marche aléatoire. Néanmoins, cette partie pouvait être admise, le reste de l'exercice restant tout à fait abordable pour les étudiants de PT.

Les probabilités semblent rester une difficulté pour beaucoup de candidats avec d'énormes confusions entre variables aléatoires, valeurs prises par la variable et probabilité d'obtenir telle valeur.

1. Lorsque l'on demande la loi d'une variable aléatoire, on attend :

   $\rightsquigarrow$ L'ensemble des valeurs possibles prises par cette variable.

$\rightsquigarrow$ La probabilité d'obtenir chaque valeur.

Toute autre réponse sera forcément fausse (éventuellement, on peut attendre une loi connue, mais dans ce cas, il convient de justifier sa réponse). Précisons aussi que, même s'il n'y a que deux résultats possibles, les probabilités d'obtenir chaque résultat ne sont pas forcément $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$.

2. Nous demandions ici une relation entre les résultats des différents lancers et la fortune du joueur. Cette relation était explicite et ne devait pas donner lieu à je ne sais quelle dissertation ou démonstration par récurrence totalement fausse. Signalons également que calculer le noyau d'une application pour montrer qu'elle est injective ne marche que pour les applications linéaires.

3. Cette question demandait l'écriture explicite de certains événements. Là encore, inutile de partir dans des digressions vaseuses, une écriture précise en termes mathématiques des événements considérés était attendue et seuls quelques très bons candidats sont parvenus à les écrire. Précisons aussi une erreur très récurrente : l'égalité
$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$$
est vraie si X et Y ont même loi. Cela n'a en revanche rien à voir avec l'indépendance (prendre par exemple $X = Y$ pour s'en convaincre).

   La toute dernière question, qui demandait juste d'expliquer pourquoi les événements considérés étaient impossibles, a en revanche été très bien traitée. L'intuition qu'il y a derrière ces calculs de probabilité semble donc être abordable par beaucoup de candidats, mais ce n'est visiblement pas le cas du formalisme.

4. Nous demandions ensuite d'obtenir une relation de récurrence sur certaines probabilités d'événements en utilisant la formule des probabilités totales (indication donnée). Beaucoup de candidats avaient déjà jeté l'éponge à ce moment là mais cette formule des probabilités totales semble maîtrisée par les candidats capables de manipuler un peu ces notions de probabilité.

5. A partir de la formule de récurrence précédente, nous demandions d'obtenir une équation fonctionnelle pour la fonction génératrice associée. Un nombre non négligeable de candidats connait la formule du produit de Cauchy pour les séries entières même si le traitement des termes de bord laisse parfois à désirer.

6. Il fallait ensuite résoudre l'équation fonctionnelle précédente (équation polynômiale d'ordre 2). Seuls quelques candidats ont abordés cette question, même si la sélection de la bonne racine au final a posé beaucoup de problèmes.

Attention, une série entière évaluée en 0 ne vaut pas toujours 0, il reste toujours le terme constant.

MATHEMATIQUES B

Présentation générale :

Le sujet de cette année se composait de quatre parties largement indépendantes, le gradient et la fonction $\Phi_{\vec{u}}$ servant de fil conducteur. Il permettait de parcourir une large partie du programme de PTSI-PT : applications linéaires, calcul matriciel et réduction, coniques, surfaces de $\mathbb{R}^3$ et plans tangents et conformément au cahier des charges, fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. En contrepartie, le sujet était sans doute un peu long.
Les résultats sont contrastés. Les questions de cours n'ont pas le pourcentage de réussite que l'on devrait trouver.
On trouve cette année un nombre très important de copies très faibles, en particulier 9% des copies ont obtenu moins de points que le total de points accordé aux deux questions de cours.
On trouve également d'excellentes copies ayant traité avec succès 80% du sujet.

Nous rappelons aux candidats que dans un sujet de géométrie, ils ne doivent pas hésiter à illustrer leurs réponses par un schéma.
Les candidats qui le font à bon escient sont récompensés.

Présentation des copies :

Il est rappelé aux candidats que leurs copies sont destinées à être lues et que des points sont prévus dans le barème pour la présentation des copies.

Les correcteurs ont constaté une nette dégradation concernant la présentation des copies, dégradation qui n'est pas due uniquement à l'interdiction du « blanco ». 6 candidats sur 10 n'ont pas jugé utile d'obtenir les points attribués à la présentation de leur copie...

Pour les obtenir, il est nécessaire de respecter les consignes simples suivantes :

- L'écriture doit être soignée : hiéroglyphes et pattes de mouche sont à proscrire. Dans certaines copies, il est impossible de faire la différence entre « 1 », « 2 », « z », et « Z », ou entre « f » et « F »...

- Les numéros des parties et des questions doivent apparaître clairement.

- Les résultats doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$ à la <u>règle</u> : dans nombre de copies, trouver quel est le résultat et où il est, s'apparente à un jeu de piste.

- $\rightsquigarrow$ Les candidats doivent éviter les ratures. Ils savent désormais que l'usage du « blanco » est interdit, et convient d'apprendre à utiliser une feuille de brouillon.

- $\rightsquigarrow$ L'orthographe des mots doit être respectée, en particulier lorsqu'ils figurent dans l'énoncé : tangent, Schwarz, parallèle, ellipse, ...,

- $\rightsquigarrow$ La grammaire ne doit pas être maltraitée : accords genre et nombre, temps de conjugaison (en particulier : participe passé, infinitif et imparfait), confusion entre les natures des mots (« calcul » et « calcule », « sont » et « son », « or » et « hors »...)...

Rédaction :

Il est rappelé aux candidats qu'ils doivent respecter les notations de l'énoncé.
S'ils ont besoin de notations qui ne figurent pas dans l'énoncé, ils doivent les définir et utiliser dans la mesure du possible des notations qui ne prêtent pas à confusion.

Tous les résultats doivent être justifiés. Cette année, beaucoup de candidats confondent démonstrations et affirmations.

Ce sujet a également mis en évidence une manque de compréhension dans l'usage des « si ... alors ... » et dans celle des « $\Leftrightarrow$ ».
Rappelons que pour que la résolution d'une équation soit complète, il convient de la résoudre par équivalence (ou double implication).

Le vocabulaire mathématique est également souvent imprécis : « S est engendrée par $\vec{u}$ », la tangente et le plan tangent sont deux objets différents tout comme le coefficient et le (un) vecteur directeur d'une droite, « f' » ne s'utilise pas pour des fonctions de plusieurs variables, sans parler de ceux qui font le produit scalaire (ou vectoriel) ou qui évoquent l'indépendance linéaire de deux réels.
De plus, les propriétés de continuité, dérivabilité sont des propriétés locales. Il convient de préciser le lieu où elles sont vérifiées.

Les identités remarquables ne sont pas toujours bien connues. Quant aux racines carrées... $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$ et $\sqrt{12}$ ne sont pas toujours remplacés par 1, 2 et $2\sqrt{3}$. $(\sqrt{3})^2$ n'est pas toujours égal à 3...
Les solutions de l'équation $X^2 = \alpha$ ($\alpha > 0$) et $X^2 = -1$ se limitent régulièrement respectivement à $\sqrt{\alpha}$ et i.
Pour finir, les réponses doivent rester dans le cadre du programme : les cylindres n'y figurent pas. Même si nous sommes ravis de constater que les candidats ont bien visualisé la surface S de la troisième partie (ou qu'ils ont lu le commentaire en fin de sujet), nous ne pouvons valider les propriétés (régulièrement fausses) que les candidats leur prêtent, leur vision du cylindre se limitant au cylindre de révolution.

D'autres remarques concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Avant de passer à ce détail, nous rappellons aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre et que comme indiqué sur le sujet, la feuille de papier millimétré doit être rendue avec la copie.

Première Partie.

1. De nombreux candidats n'ont pas remarqué que le terme important dans la définition de F était ≪ continues ≫ et nous sommes souvent invités à croire les candidats sur parole lorsque qu'il nous disent que φ est à valeurs dans F.
   Par ailleurs, que le gradient soit noté φ, ∇ ou $\overrightarrow{\text{grad}}$, le gradient reste le gradient et on ne peut pas justifier qu'il est linéaire par ≪ car le gradient est linéaire ≫.
   Le recours très fréquent à cette justification (quand on en trouve une...) semble masquer soit que le candidat ne sait pas ce qu'il doit démontrer, soit que le candidat sait ce qu'il doit démontrer mais ne sais pas comment faire, soit qu'il ne connaît pas la définition du gradient...
   Il est d'ailleurs inquiétant de trouver autant de candidats qui ne connaissent pas la définition du gradient puisque cet opérateur est très utile en sciences physiques ou en sciences industrielles. Il est régulièrement confondu avec $\Phi_{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}$, avec le laplacien ou le rotationnel. Il arrive même que le gradient change de définition entre la partie algèbre et la partie géométrie !
   On voit également des confusions avec la définition d'un (sous-)espace vectoriel. Si $\varphi(0) = 0$ est juste mais inutile, un minimum de réflexion sur la nature des objets manipulés devrait éviter aux candidats d'écrire $0 \in \varphi$ ou φ est non vide.
   Enfin, c'est φ qui est linéaire et $\varphi(f)$ qui est continue (et non l'inverse...).

2. Sans doute parce qu'il est vu dans les autres matières, on trouve souvent (y compris dans des mauvaises copies) que le noyau est l'ensemble des fonctions constantes mais sans justifications (y compris dans des bonnes copies).
   Signalons que le fonction nulle est une fonction constante, que les fonctions constantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine de définition et que E et F ne sont pas de dimension finie. Par ailleurs lorsque l'on dit que le noyau est (ou n'est pas) nul, il convient d'utiliser $\{0\}$ et non 0.
   Le lien avec l'injectivité (quand il est fait) est souvent correct.

3. (a) Quelques inégalités de Cauchy-Schwarz (plus ou moins fantaisistes). Seulement

42% de succès pour cette question de cours.

(b) Beaucoup de candidats utilisent le résultat précédent sans dire et encore moins justifier de f est de classe $\mathcal{C}^2$.
A noter : a priori, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et non $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

4. (a) Pour les candidats qui utilisent le résultat précédent, la majorité se contente de constater que $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sans justification.
Pour ceux qui essayent de résoudre l'équation $\nabla f = V$, voir ci-dessous.
Le lien avec la surjectivité (quand il est fait) est souvent correct.

(b) Il y a ceux qui donnent des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, il y a ceux qui oublient les ≪ constantes d'intégration ≫, ceux qui ne donnent pas pas la bonne nature à ces ≪ constantes ≫, ceux chez qui tout se simplifie par magie.
Les raisonnements corrects qui arrivent au bout sont généralement difficiles à suivre faute d'explications (fonctions qui perdent des variables) et il manque souvent la réciproque des ≪ donc ≫.
Signalons enfin que les opérations simultanées $\text{Ł}_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $\text{Ł}_2 \leftarrow L_2 - L_3$ et $\text{Ł}_3 \leftarrow L_3 - L_1$ transforment un système en un système non équivalent.

Deuxième Partie.

1. Plus de 40% des candidats ne remarquent pas que par définition de G, la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ en est une famille génératrice.
En dimension finie, une famille libre (ou génératrice) n'est pas toujours une base.

2. La définition d'un endomorphisme est mal connue, de même que la notion de restriction. Rappelons que cette dernière donne des informations sur le domaine de départ de la fonction et non son domaine d'arrivée.
La linéarité de ϕ_1 est souvent démontrée en une seule étape avec la seule justification ≪ φ ≫ est linéaire, $\vec{u}$ étant traité comme une constante... quand il n'est pas supprimé.
Le produit scalaire est bilinéaire (et non linéaire).

3. (a) La construction de A doit être justifiée par les calculs de $\phi_1(f_k)$ pour $k = 1$, 2, 3, 4, 5 et 6. A noter que ces calculs suffisent (avec la linéarité de ϕ_1) à prouver que ϕ_1 est un endomorphisme. En les faisant figurer à la question précédente, on évite soit des calculs - pénibles à écrire - avec des λ_k ou le bla-bla qui n'est souvent constitué que d'affirmations.

On se demande si les candidats ayant trouvé $A^2 = -I_6$ ont bien fait le calcul, ou s'ils ont extrapolé le résultat après le calcul de quelques coefficients...

(b) Les candidats confondent ≪ sans calcul ≫ et ≪ sans justification ≫.

Dans la liste des erreurs trouvées dans cette question :

⇝ ≪ A^2 est diagonale supérieure ou A^2 est symétrique réelle. ≫

⇝ ≪ A est triangulaire supérieure donc A^2 est (ou n'est pas - suivant les copies) diagonalisable. ≫

⇝ ≪ A^2 possède une valeur propre multiple donc elle n'est pas diagonalisable. ≫

⇝ ≪ Le polynôme caractéristique est scindé donc A^2 est diagonalisable. ≫

⇝ ≪ Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples. ≫

⇝ ≪ A^2 diagonalisable donc A diagonalisable. ≫

⇝ ...

(c) Le calcul de ϕ_1^2 a été fait en utilisant le théorème de Schwarz sans que celui si soit cité et encore moins justifié.
Mais on trouve aussi des candidats ayant remarqué que pour toutes les fonctions de G, certaines dérivées secondes étaient nulles et que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -f$ et ont donc optimisé l'équation proposées. Cela a été, bien entendu, valorisé.

(d) Cette question a été assez peu traité, y compris par ceux ayant calculé les sous espaces propres (calcul non autorisé) en 3.(b) ou ceux ayant répondu à la question précédente. Le lien entre les vecteurs propres de ϕ_1^2 et ceux de A^2 sont -ils bien compris ?

Troisième Partie.

1. (a) Seulement 48% des candidats répondent correctement à cette question de cours... Signalons une confusion entre (a, b, c) non tous nuls et (a, b, c) tous non nuls.

   (b) Cette question n'a pas posé de problème particulier aux candidats connaissant la définition du plan tangent... et ayant lu la dernière ligne de l'introduction. On note quand même de nombreuses erreurs de calcul dans le développement, ou la division par 2 de l'équation demandée.

2. (a) Quelques dérivées bizarres... Ecrire l'équation du plan tangent est inutile ici.
   Ce n'est pas parce que ≪ cela marche ≫ en un point M_0 particulier (souvent celui de la question précédente... qui n'appartient pas toujours à la surface) que ≪ cela marche ≫ pour tous les points.
   Quelques candidats ont établi que la surface est régulière.
   Quand à la nature de cette surface... on trouve souvent une page de calculs pour aboutir à S est : une parabole, une ellipse, une hyperbole, un cercle, une droite, la réunion ou l'intersection de deux droites... objets qui, faut-il le rappeler, ne sont pas des surfaces.
   A l'intention des futurs candidats : les cônes, cylindres et quadriques ne figurant pas au programme, les seules surfaces que vous pouvez identifier à l'aide d'une équation sont les plans et les sphères.

   (b) Il y a ceux qui connaissent la règle de dérivation des fonctions composées (ou règle de la chaîne), au prix parfois d'une notation inadéquate : $\dfrac{\partial g}{\partial x + y}$ et les autres...

   (c) Il suffisait d'écrire $y - z = (x - z) - (x - y)$... ce qui a été fait par 27% des candidats.

3. (a) Il s'agissait de justifier que cette surface réglée correspondait au problème de cette partie. On attendait pour cela le résultat suivant qui figure explicitement au programme ≪ Le plan tangent en un point régulier contient la génératrice passant par ce point ≫.
   Au lieu de cela, il y a eu beaucoup d'explication vaseuses, très imprécises ($\vec{u}$ engendre ou dirige S), voire fausses (S ou $\vec{u}$ est tangent à Γ, et qui se terminent régulièrement par un ≪ forcément ≫.

   (b) Des candidats se contentent de vérifier que Γ est dans la surface d'équation $(x - z)^2 + (y - z)^2 = 1$, d'autres vérifient que le paramétrage de S vérifie l'équation, ou tentent des explications avec des translations (ce qui aurait pu aboutir). Finalement seul 1 candidat sur 5 arrive au résultat... à condition de ne pas être trop regardant sur la rédaction.
   Pourtant, il s'agit là d'une des capacités exigibles du programme de PT (page

24) : ≪ Exemples [...] de recherche de paramétrages et équations cartésiennes (surfaces de révolution, surfaces réglées) ≫. Nous invitons donc les futurs candidats à s'entraîner à cette recherche et à la rédiger soigneusement à l'aide d'équivalents et de quantificateurs ($\exists$, et non $\forall$).

(c) Rappelons (comme tous les ans) que dans l'espace, 2 équations sont nécessaires pour décrire une courbe et que les points (et les vecteurs) ont trois coordonnées. 27% des candidats n'identifient pas un cercle, seuls 18% en donnent la totalité des éléments caractéristiques.

(d) Il convenait de préciser que l'axe contenant tous les centres n'était pas orthogonal aux plans Π_a.
La conclusion correcte de cette question était ≪ on ne peut pas dire que S est une surface de révolution ≫ et non ≪ on peut dire que S n'est pas une surface de révolution ≫.

i. Là aussi, ≪ sans calcul ≫ ne veut pas dire ≪ sans justification ≫. Par ailleurs, la question portait sur l'endomorphisme associé à P et pas sur P directement.
L'orientation de la base est rarement évoquée.

ii. Trop peu de candidats connaissent la méthode à utiliser.
Parmi ceux qui ont une idée sur ce qu'il faut faire, il y a ceux qui se trompent dans le calcul de $\vec{e_2}$, ceux qui se trompent dans l'ordre des colonnes de P (et ceux qui échangent lignes et colonnes), ceux qui ne connaissant pas les formules de changement de base, ceux qui expriment X, Y et Z en fonction de x, y et z et qui ne savent pas quoi en faire... et pourtant certains de ces candidats arrivent quand même à la bonne réponse. Il y a aussi ceux qui pensent que les correcteurs vont faire ou finir leurs calculs.

iii. Cette question est très décevante.
Les candidats se lancent sans réflexion dans une suite de calculs automatiques sans analyser ni la question ni l'équation proposée. Certains en oublient même de répondre à la question posée.
Ici, en l'absence de partie linéaire, seul le calcul des valeurs propres était utile pour donner l'équation réduite et donc la nature de la courbe.
La détermination des sous-espaces propres n'était utile que pour la question suivante... que trop de candidats ont négligée.

iv. Le correcteur va d'abord chercher les vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ (ceux de l'énoncé, pas ceux du candidat qui est invité à trouver une autre notation pour son nouveau repère, par exemple ε_1 et ε_2), et vérifier que ceux-ci sont bien unitaires, c'est à dire de longueur 6cm (et non placés au bout des axes).
Ensuite, il va chercher ε_1 et ε_2 et vérifier quils sont aussi unitaires.
Enfin, il va regarder l'allure de l'ellipse.
Les vecteurs ε_1 et ε_2 sont souvent faux (et pas uniquement pour un problème

de longueur) et pour une raison inconnue, beaucoup de candidats ont fait le tracé dans le repère $(O\,;\,\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$.

Quatrième partie.

1. Les plans proposés sont souvent corrects mais il en manque. Les principales sources d'erreurs sont des notations mal choisies, des plans qui passent tous par O et le fait que l'orthogonal de $\vec{u}$ n'est pas un plan.

2. Il convenait d'introduire d'abord la fonction définie par $f(x,y,z) = g(x,y) - z$ ou un paramétrage de la surface.
La démonstration de cette question doit figurer dans tous les cahiers de cours des candidats, elle n'a pourtant été réussie que par 35% d'entre eux.

3. Comme la fonction h est une fonction d'une seule variable, il convient d'utiliser h' ou $\dfrac{dh}{dt}$ plutôt que des dérivées partielles.
De nombreuses tentatives d'escroquerie dans cette question.

4. (a) On trouve régulièrement des produits scalaires d'un vecteur à 2 coordonnées avec un vecteur à 3 coordonnées.
Il n'est pas possible de commencer cette question par « d'après la question précédente, comme g est solution alors $g = ...$ », la question précédente étant en « si $g = ...$ alors g est solution ».

   (b) Dans l'écriture « $\delta(x,y) = (x_1, y_) \Leftrightarrow (x,y) = \delta^{-1}(x_,y_1)$ » $\Rightarrow$ prouve l'injectivité et $\Leftarrow$ la surjectivité, donc le raisonnement par équivalence est impératif.
Si on veut exploiter le noyau et/ou le rang, il faut déjà remarquer que la fonction est linéaire, par exemple en disant qu'il s'agit de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $M = ...$ et dans ce cas, calculer $\det(M)$ est suffisant.
Par ailleurs, ce n'est pas parce que « on est en dimension finie » (pas assez précis) que « injectif $\Leftrightarrow$ bijectif ».
Le théorème de la bijection ne fonctionne pas ici. Une fonction de deux variables peut être de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à chacune de ses deux variables sans être de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
On voit plus souvent la justification « les composantes sont polynomiales » dans les calculs des parties I et III que dans cette question...

   (c) Il suffisait de poser $g_1 = g \circ \delta^{-1}$... A la place on voit beaucoup de « d'après la question 3, g est solution donc $g = ...$ »

(d) Voir III 2. (b).
Bien que les calculs soient les mêmes, il n'y a pas de corrélation systématique (même en faisant abstraction des candidats qui n'ont pas traité cette question faute de temps) entre les résultats de ces deux questions. Peut-être parce qu'elles étaient posées différemment ?

(e) On demandait ici un « si et seulement si », les candidats qui mettent des « donc » entre leurs lignes ne répondent donc pas à la question.

(f) Souvent correct si (Eq_2), l'est même si on ne sait pas toujours où est la fonction G_1. Il est de plus inutile de rajouter une (vraie) constante à G_1...

(g) Question plutôt ratée...
Cependant quelques (rares) candidats ont constaté qu'ils venaient d'établir la réciproque de la question 3.

5. (a) On trouve beaucoup trop souvent « g vérifie (Eq_1) donc d'après la question 4(a)... »
Les dérivées partielles de g sont régulièrement fausses.

(b) Parce qu'elle était posée en bout de sujet, il n'y avait pas d'indication. Quelques candidats ont eu l'idée d'exploiter $x - 2y = cte$ sans forcément aller au bout.

(c) Les candidats ont été un peu plus nombreux à écrire $\nabla g = \vec{0}$,mais peu sont allés au bout.

(d) La Hessienne ne fonctionnant pas ici, peu de candidats sont parvenus (faute de temps) à la réponse.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

Le sujet avait pour fil directeur le calcul de la constante de Kepler-Bouwkamp :

$$\prod_{k=3}^{+\infty} \cos \frac{\pi}{k}$$

Après un Préambule où il était demandé aux candidats de rappeler l'énoncé de la formule de Taylor-Young, la première partie mettait en jeu une approximation de Padé, qui était l'occasion de faire réaliser l'étude d'une fonction rationnelle paire, et de comparer son développement en série entière avec celui de la fonction cosinus. La seconde partie proposait la résolution d'une équation fonctionnelle, occasion cette fois-ci de faire manipuler et étudier des suites et des séries numériques. Enfin, une troisième partie, avec des questions plus difficiles, faisait le lien entre la fonction Gamma et la fonction sinus, par la formule dite « de réflexion ».

Le sujet comportait, comme l'an dernier, des questions de cours, et des questions faciles, accessibles, ce qui a permis aux candidats de répondre à un nombre important de questions.
A côté, comme l'an dernier, d'autres questions étaient destinées à valoriser les candidats soigneux et rigoureux ; d'autres, plus difficiles, à départager les très bons candidats.

La situation exceptionnelle cette année, avec le confinement et le décalage dans le temps des épreuves, ne semble pas avoir impacté négativement les candidats : dans l'ensemble, le sujet plutôt bien réussi : les mois de révision supplémentaires ont été bénéfiques. Il reste bien sûr toujours quelques erreurs classiques, mais moins que d'habitude.

Il apparaît que, pour de nombreux candidats, l'équivalence et la négligeabilité sont très mal maîtrisées. Il n'est pas rare de voir des sommes d'équivalents, ou des différences d'équivalents qui s'annulent, sans que le candidat pense à effectuer un développement limité à un ordre supérieur.

D'autre part, les candidats devraient faire attention à ne pas écrire « par définition » lorsque c'est une propriété qui est en jeu.

Comme l'an dernier, l'orthographe n'est toujours pas maîtrisée, les participes passés sont souvent à l'infinitif, et les verbes « résoudre », « conclure » sont mal conjugués. La terminologie mathématique usuelle est également malmenée :

« voisinnage » ;
« f est définit » ;
« on a montrer » ;
« réccurence » ;
« l'intégral » ;
« la fonction est pair » ;
« Reiman » ;
« le therme » ;
« un interval » .

Comme l'an passé, nous souhaitons faire quelques rappels de bon sens :

i. Il faut produire un raisonnement : recopier le résultat de la question n'est pas une preuve. Si le résultat attendu est donné dans l'énoncé, il faut prêter une attention particulière à la rédaction de la solution.

ii. Certains candidats manquent d'honnêteté intellectuelle en essayant de tromper le correcteur, effectuant un calcul manifestement faux mais en concluant avoir répondu. Chez certains, c'est même systématique. Dans ce cas la copie est pénalisée.

Remarques particulières

Préambule

1. Cette question n'a pas été traitée correctement par les candidats. Beaucoup confondent la formule de Taylor-Young avec la formule de Taylor avec reste intégral. D'autre part, l'énoncé était extrêmement précis, en indiquant les notations : beaucoup de candidats ne les respectent pas.

   Nous signalons aussi que, trop souvent, la formule est énoncée pour tout x de I, le terme de reste en « o » est omis, ou alors, les candidats donnent un terme de la forme « $o(x^n)$ », ou ne font pas attention qu'on est à l'ordre n, et confondent l'indice muet de la somme avec celui du reste : « $o((x-a)^k)$ ».

2. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Nous rappelons que si le développement est demandé à l'ordre 2, il ne faut pas le donner à l'ordre 3, 4, ou $2\,n$.

Partie I

1. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Nous signalons que certains candidats, qui ont bien montré que, pour tout réel x, $\phi(-x) = \phi(x)$, oublient de conclure que la fonction est paire. D'autre part, affirmer que $\phi(-x) = \phi(x)$ est bien mais le justifier un minimum est mieux. Enfin, certains confondent la fonction et sa représentation graphique : ce n'est pas ϕ qui est symétrique.

2. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Quelques candidats prennent le quotient sans vérifier que le dénominateur ne s'annule pas. D'autres encore partent d'une égalité entre $\phi(x)$ et $\psi(x)$ pour montrer que c'est toujours vérifié ...
   Et trop souvent, il manque une simple phrase de conclusion ...

3. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Mais très peu de candidats justifient que la fonction est dérivable. Certains candidats auraient pu détecter leurs erreurs de calcul : la dérivée d'une fonction paire est toujours une fonction impaire.

4. Le tableau de variations de la fonction ϕ sur $\mathbb{R}$ a en général été correctement donné. Concernant le calcul des limites, nous avons trouvé de nombreuses ratures, de nombreuses erreurs. Certains candidats donnent des limites aberrantes aux bornes du domaine, en complète contradiction avec la courbe qu'ils tracent ensuite.

5. Très peu de candidats ont donné le développement en série entière de la fonction ϕ. Pour ceux qui l'ont fait, si la formule est souvent correcte, c'est le rayon de convergence qui est erroné. Beaucoup de candidats affirment que la fonction est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, ou alors, sur $]-1,1[$. Sinon, quelques candidats utilisent la formule donnant le développement en série entière de
   $$u \mapsto \frac{1}{1-u}$$
   mais avec $u = \dfrac{12}{x^2}$.

6. En ce qui concerne la représentation graphique telle que demandée par l'énoncé, en particulier, l'échelle demandée de 3 cm pour une unité. Beaucoup de candidats pensent que $\cos(\pi) = 0$, certains candidats tracent une courbe en contradiction avec leur tableau de variations. Beaucoup de tracés sont aussi constitués de segments

rectilignes, y compris pour la fonction cosinus ...

Concernant l'interprétation, rares sont les candidats à expliciter le développement à l'ordre 2 de ϕ. Le développement de ϕ en série entière, lorsqu'il a correctement été obtenu dans la question 5, est en effet très rarement utilisé. Le fait que le développement en série entière de ϕ ne comporte que des termes d'indice pair est très insuffisant pour justifier la superposition des courbes au voisinage de 0.

Enfin, nous rappelons que lorsqu'il y a deux courbes sur la même figure, il faut préciser quelle courbe correspond à la représentation de telle ou telle fonction.

Partie II

1. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Il reste quand même des candidats qui ignorent cette formule.

2. De nombreux candidats ne savent pas rédiger un raisonnement par récurrence : il faut commencer par faire attention au rang en jeu lors de l'initialisation (1 ici, et non zéro comme nous l'avons trouvé sur de nombreuses copies). Ensuite, donner une propriété « $P(n)$ » qui ne dépend pas de n, la supposer vraie pour tout n lors de l'hérédité, ou encore (plus inquiétant) une hérédité prouvée en montrant que si la propriété est vraie au rang $n+1$, alors elle est vraie au rang n, ou, très inquiétant toujours, changeant d'indice $m = n + 1$ ...

   On attend beaucoup de soin dans la présentation de la récurrence : la propriété $P(n)$ doit être clairement exprimée, la conclusion également (éviter les phrases du genre « la récurrence s'enclenche »)

   Enfin, plus préoccupant, des candidats ont une récurrence sur x.

3. Dans cette question, bien que le raisonnement soit similaire à celui de la question précédente, il fallait détailler un minimum l'argument, et faire attention à ne pas diviser par 0. Les candidats peinent parfois à justifier leur réponse. D'autre part, beaucoup de candidats adoptent des démarches excessivement compliquées, avec des multiplications et divisions inutiles, manipulées sans aucune rigueur.

4. Cette question était facile, mais a été mal réussie car de nombreux candidats divisent/simplifient par le produit des cosinus sans vérifier qu'il ne s'annule pas.

5. Dans cette question, la réponse attendue était $h(0) = 1$, et non $h(x)\dfrac{\pi x}{\sin \pi x}$.
   Là encore, de nombreux candidats ne font pas attention qu'il ne faut pas diviser

par 0. Enfin, très peu de candidats justifient la limite par la continuité en 0 de la fonction h. Il convient de se souvenir de la caractérisation séquentielle de la continuité.

6. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. On rappelle là encore qu'il ne faut pas oublier de donner un minimum de justifications.

7. Cette question n'a été que peu souvent bien traitée. Certains candidats manquent de recul : en trouvant $h(x) = 1$, l'égalité demandée est-elle vérifiée ? Il n'est pas rare dans les copies de trouver la réponse $\forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$, alors que cette dernière expression n'est pas définie en 0. Par ailleurs, peu de candidats pensent à vérifier la continuité en 0.

Partie III

1. Cette question n'a été correctement traitée que par peu de candidats. Il était naturel de chercher un développement asymptotique du terme général de la série : nous avons relevé de très nombreuses erreurs venant du développement limité incorrect de la fonction cosinus, de nombreuses copies omettant le facteur $-\dfrac{1}{2}$ devant le terme en $\dfrac{\pi}{(n+1)^2}$, ou alors, écrivant des équivalences entre $\dfrac{\pi}{2\,(n+1)^2}$ et $\dfrac{1}{(n+1)^2}$ ou $\dfrac{1}{n^2}$.

   Nous rappelons que l'on ne peut pas composer des équivalents par une fonction : il fallait garder la formule avec le terme en o, puis prendre le logarithme. De plus, le critère d'équivalence des séries fonctionne pour celles de signe constant. Pour de trop nombreux candidats, $\ln(\cos x)$ est positif. De trop nombreux candidats écrivent que si $\lim u_n$ existe, ou alors vaut zéro, alors la série de terme général u_n converge. Plusieurs candidats écrivent que « $\cos \dfrac{\pi}{n}$ est continue ». Certains parviennent à trouver un rayon de convergence, alors que ce n'est pas une série entière. Plusieurs écrivent, après avoir montré que $u_n < 0$, que la série converge par comparaison avec la série nulle. Certains candidats, voulant trop en faire, utilisent l'écriture complexe du cosinus et mettent des nombres complexes dans des logarithmes.

   D'autres encore veulent appliquer le critère de d'Alembert, inefficace ici. Il est effrayant de voir certaines erreurs concernant le logarithme.

2. (a) Cette question n'a pas toujours été correctement traitée. Les candidats confondent

l'indice de sommation en jeu dans les sommes partielles $\sum_{k=3}^{n} \ldots$, avec l'entier n, ce qui les conduit ensuite à des résultats complètement erronés, par exemple $(n+3)\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$.

D'autre part, si l'on demande de calculer de deux façons différentes, c'est qu'il y a une raison ... Ainsi, il n'est pas très utile que les deux façons donnent le même résultat.

Enfin, les candidats ont souvent trouvé le même résultat par deux moyens différents, alors que l'idée était de trouver deux formules distinctes pour la même somme partielle.

Sinon, nous avons relevé des erreurs dans la sommes télescopique, avec R_4 au lieu de R_3.

(b) Cette question n'a pas toujours été correctement traitée. Nous rappelons qu'une suite majorée par 0 n'est pas nécessairement convergente, et si $u_{n+1} - u_n \to 0$, on ne peut pas conclure que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ converge. Une série convergente ne signifie pas que la limite du terme général est nulle.

Les candidats doivent aussi faire attention au vocabulaire. Parmi les propositions lues cette année, nous avons vu des « par télescopie », et même une « somme stoechiométrique ».

(c) Beaucoup de candidats ne font pas le lien avec les questions précédentes. Certain ont tout de même bien répondu à la question en majorant le produit partiel par le produit des terms d'une une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1. Cependant, de nombreux candidats ont inventé des théorèmes pour justifier la convergence. Pour cette question, certains candidats prouvent le résultat (de façon convenable) en montrant que la suite est décroissante et minorée. Nous rappelons que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout n n'implique que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante uniquement si la suite est positive.

D'autre part, un produit de termes de $]-1,1[$ ne donne pas nécessairement une suite convergente.

Enfin, le passage de la convergence de la suite $(\ln R_n)_{n\geq 2}$ à celle de la suite $(R_n)_{n\geq 2}$ est rarement justifié : parfois un argument est donné concernant la continuité ou la bijectivité de la fonction logarithme, mais c'est bien la continuité de l'exponentielle en $\ell = \lim \ln(R_n)$ qui est nécessaire.

(d) Cette question n'a été traitée que par peu de candidats. Certains pensent à utiliser la fonction ϕ de la première partie, mais peu indiquent que la « méthode de calcul » demandée consiste à effectuer un produit fini.

3. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Certains semblent toutefois ignorer cette formule.

   (b) Comme la précédente, cette question a été traitée par la majorité des candidats, même si un nombre non négligeable de copies font la somme sur k des $(1-t)^n$. C'est dommage, il faut bien relire avant de rendre sa copie à la fin de l'épreuve.

   (c) Cette question n'a pas toujours été correctement traitée. Comme chaque année, on trouve des confusions entre la convergence de l'intégrale I_n et celle de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   D'autre part, pour écrire $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-t)^k \underset{\cdot}{\mathrm{t}}$, il faut avoir d'abord prouvé la convergence des intégrales. De nombreux candidats commencent le calcul avant d'avoir étudié la convergence. Enfin, nous rappelons que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ diverge ...

   (d) Cette question n'a pas non plus toujours été correctement traitée. Le résultat étant donné dans l'énoncé, il convient de bien soigner et justifier le calcul. Par exemple, de nombreux candidats oublient le signe moins dans leur primitive de $t \mapsto (1-t)^k$, mais ont par miracle le bon résultat à la fin. Il ne sert à rien d'essayer de tromper le correcteur lors de la réindexation de la somme. Certains candidats décident de faire un raisonnement par récurrence (inutile ici). Ils arrivent au résultat sans utiliser l'hypothèse de récurrence et ne s'en alarment pas.

   Enfin, un nombre sidérant de candidats dit que l'intégrale I_n diverge à la question précédente, mais font néanmoins le calcul à cette question. Ce manque de recul paraît vraiment grave pour de futurs ingénieurs.

4. (a) Cette question a en général été correctement traitée, même si on trouve beaucoup d'intégrations par parties inutiles.

   (b) Pour étudier la convergence de la série de terme général u_n, nous rappelons que l'on ne peut pas faire la somme d'équivalents, il faut là aussi repasser par des égalités avec les termes en o.

   Certains candidats utilisent le critère de d'Alembert, trouvent une limite égale à 1, et concluent en disant que la série est convergente. Beaucoup trop de candidats pensent que l'intégrale entre 0 et 1 de la fonction inverse, ou du carré de la fonction inverse, convergent. De manière générale, les exemples de Riemann au voisinage de 0 sont mal maîtrisés. Les comparaisons entre puissances de x, lorsque$x \in [0;1]$, sont souvent fausses.

   (c) Pour cette question, on demandait un minimum d'explications pour justifier que la somme $\displaystyle\sum_{k=11}^{n} \ln \frac{k+1}{k}$ était télescopique.

D'autre part, le fait que, lorsque l'entier n tend vers l'infini, $\ln(n+1) \sim \ln n$ n'est pas évident et l'avoir prouvé ne suffit par à conclure. Nous avons relevé beaucoup de tentatives d'arnaque dans le calcul de la somme partielle afin qu'elle coïncide avec la limite de l'énoncé. Beaucoup de candidats remplacent en effet $\ln(n+1)$ par $\ln n$. Le raisonnement proposé est le suivant : « puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$, et puisque $\ln n$ et $\ln(n+1)$ ont la même limite/sont équivalents, on a l'existence de γ ». Contre-exemple à ce raisonnement : $u_n = n, v_n = n$ sont les termes généraux respectifs de deux suites telles que $u_n - v_n$ admette une limite lorsque l'entier n tend vers l'infini. Si on remplace le terme général v_n par celui de la suite équivalente $w_n = n + (-1)^n$, la suite de terme général $u_n - w_n$ n'admet plus de limite.

Enfin, certains candidats écrivent la série sous la forme $\displaystyle\sum \frac{1}{n} - \sum \ln \frac{n+1}{n}$, ce qui n'est pas possible, puisque ce sont deux séries divergentes.

5. (a) Cette question n'a été correctement traitée que par peu de candidats. C'est très bien de redonner les théorèmes du cours, mais il faut ensuite les appliquer.

   Parmi les candidats (moins de la moitié) qui connaissaient le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, rares sont ceux qui ont effectivement vérifié les hypothèses. Beaucoup ont par exemple écrit que « pour tout x dans $\mathbb{R}_+^\star$ »la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est continue sur $[0, n]$.

   Pour l'hypothèse de domination, il ne suffit pas de dire que le module de la fonction est dominé par une fonction (indépendante de xd ?ailleurs), il faut aussi montrer que cette dernière fonction est intégrable.

   (b) Le calcul de la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n(1)$ n'a pas toujours été correctement fait. De nombreux candidats passent à la limite sous l'intégrale, sans aucune justification, alors qu'il fallait simplement calculer explicitement l'intégrale.

   (c) Cette question n'a pas toujours été correctement traitée. Ici aussi le résultat était donné dans l'énoncé, donc il fallait bien justifier les intégrations par parties.

   D'autre part, un raisonnement par récurrence n'est pas forcément nécessaire. Il fallait expliciter la première étape (dans l'idéal la seconde aussi pour justifier la dérivée de $t \mapsto \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1}$ et la dernière intégration.

   Enfin, nous rappelons que pour effectuer une intégration par parties, il faut justifier que les fonctions sont de classe C^1.

   (d) Cette question a été correctement traitée par une majorité des candidats.

(e) Dans cette question, nous avons relevé de nombreuses erreurs :

« $e^{\gamma\, x} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right) e^{-\ln n}$ », ou encore « $\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{k}{x}\right)^{-1} e^{\frac{k}{x}} = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{k}{x}\right)^{-1} \prod_{k=1}^{+\infty} e^{\frac{k}{x}}$ ».

Peu de candidats ont compris que, comme pour les séries, il fallait repasser par les produits partiels puis passer à la limite.

(f) Nous rappelons que les produits et sommes « infinies » ne sont pas des produits et des sommes, mais des limites, comme cela figurait très explicitement dans l'énoncé : ainsi, on ne peut pas écrire $\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \dots\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp \dots$: il faut d'abord passer par les sommes et produits partiels, puis ensuite passer à la limite (en justifiant la limite par la continuité de l'exponentielle).

(g) Pour cette question, nous faisons les mêmes remarques que pour la question précédente.

On constate de nombreuses « arnaques » : des candidats commencent le calcul, n'arrivent pas à finir, mais encadrent quand même le résultat demandé.

Quelques excellentes copies ont su utiliser les questions précédentes.