Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

L'épreuve était composée d'un problème d'algèbre linéaire (découpé en trois parties) et d'un exercice de probabilités relativement long.

La qualité des copies est très disparate, allant de la copie quasi-vide à la copie traitant l'intégralité du sujet en ayant quasiment la note maximale. Le sujet s'est révélé très classant. On regrettera toujours un niveau moyen assez faible et une présentation des copies généralement déplorable, avec des idées jetées pèle-mêle, sans structuration logique, et des résultats affirmés tels quels, notamment en probabilités, sans aucune justification.

Problème d'algèbre linéaire

Ce problème étudiait la diagonalisibilité des matrices A et de A^2.

Partie I

Cette première partie consistait à diagonaliser explicitement deux matrices te taille 3×3 (A et A^2), l'une ayant 3 valeurs propres simples l'autre ayant une valeur propre double et une simple, puis de démontrer que si la matrice A est diagonalisable, alors A^2 l'est aussi.

Cette partie ne comportait aucune difficulté particulière et était essentiellement calculatoire (avec des calculs relativement simples). Elle a permis d'éliminer les trop nombreux candidats qui ne connaissent toujours pas les conditions de diagonalisation d'une matrice alors qu'il s'agit d'un des résultats majeurs du programme d'algèbre linéaire de seconde année, et que cela est demandé quasiment chaque année lors de cette épreuve !

Bien que simples, ces calculs ont posé pas mal de problèmes à certains candidats avec de nombreuses erreurs (il s'agissait pourtant de calculer un déterminant 3×3, puis de résoudre des systèmes linéaires de la même taille), le plus souvent faute de néthodologie rigoureuse pour mener ces calculs à bien. Un recul sur les résultats obtenus permettrait de détecter certaines erreurs, ainsi, il est tout à fait anormal de ne trouver que le vecteur nul comme vecteur propre, et de mettre une ligne de 0 dans une matrice de passage pourtant inversible. Certains affirment même que la matrice A^2 n'est pas diagonalisable à la première question, puis montrent qu'elle l'est à la dernière.

Partie II

Cette deuxième partie donnait un contre-exemple à la réciproque de : « A diagonalisable $\Longrightarrow A^2$ diagonalisable » : une rotation d'un quart de tour dans l'espace.

Bien que traitant d'un exemple numérique concret, cette partie a posé d'énorme difficultés à la majorité des candidats, mettant en évidence que ceux-ci se contentent d'appliquer des recettes sans vraiment comprendre ce qu'ils sont en train de faire.

Ainsi, beaucoup connaissent la forme canonique de la matrice d'une rotation dans l'espace et l'appliquent telle quelle sans vérifier que l'axe de rotation est le bon (ce qui n'était pas le cas). Mentionnons ici que certains candidats ne connaissent pas la valeur de $\cos \dfrac{\pi}{2}$!

Ensuite, beaucoup perdent un temps infini à calculer des sous-espaces propres pour montrer qu'une matrice déjà diagonale est diagonalisable.

Dans le même genre d'idées, il était demandé de trouver deux vecteurs orthogonaux à un vecteur donné. Beaucoup de candidats se lancent à corps perdu dans des calculs pour déterminer ces vecteurs, alors qu'il est assez clair qu'il n'y a pas unicité de la solution et donc qu'il faudra choisir une solution particulière à un moment. Même normer un vecteur est difficile pour certains candidats.

Les formules de changement de base pour les matrices ne sont majoritairement pas connues (alors qu'elles le sont pour la diagonalisation !). Beaucoup se contentent de multiplier la matrice représentant la rotation dans une certaine base par la matrice de passage pour obtenir la matice dans l'autre base. Et bien peu de candidats ont le réflexe de dire qu'une matrice de passage d'une b.o.n.d. à une autre b.o.n.d. est orthogonale et donc que l'on connait son inverse.

Enfin, une très petite minorité de candidats sont capables de dire qu'une matrice semblable à une matrice diagonalisable est également diagonalisable.

Globalement, un peu de recul sur les résultats permettraient d'éviter certaines erreurs et de perdre beaucoup de temps dans des calculs inutiles, mais la grande majorité des candidats en manque cruellement.

Partie III

Cette dernière partie démontrait l'implication ≪ A^2 diagonalisable $\Longrightarrow A$ diagonalisable ≫, dans le cas où les valeurs propres de A^2 sont toutes strictement positives. La preuve reposait sur une démonstration du lemme des noyaux dans le cas de deux valeurs propres distinctes.

Bien que plus théorique, cette partie guidait énormément les candidats et a donc été mieux réussie que la précédente. On regrettera cependant un manque de précision dans les raisonnements mathématiques et la rédaction. Ainsi, il est très désagréable de lire des affirmations du style ≪ Les vecteurs propres de f forment une base de E ≫ (voire ≪ Les sous-espaces propres de E forment une base de E ≫) même si l'utilisation qui en est faite ensuite est correcte.

Globalement, on peut affirmer que beaucoup de candidats ne sont pas conscients des objets manipulés et il est tout à fait anormal de voir écrit par exemple ≪ $f \circ g(x) = f(x) \circ g(x)$ ≫, ou d'autres horreurs du même accabit.

Exercice de probabilités

Cet exercice consistait à lancer, indépendemment les unes des autres et uniformément, n boules dans N cases et à étudier le nombre moyen de cases non vides à l'issue de l'expérience.

Cet exercice a été très mal traité, les probabilités semblant poser des problèmes insurmontables à bon nombre de candidats.

Ainsi, les premières questions portaient sur du dénombrement pour calculer quelques probabilités (ces questions n'étaient pas bloquantes pour la suite de l'exercice). Visiblement, pour beaucoup de candidats, la stratégie consiste à tirer au hasard (uniformément ?) une loi parmi les lois usuelles et d'affirmer que la variable étudiée suit cette loi. Pour beaucoup d'autres, la réponse tient en une ligne qui comporte une formule (le plus souvent très fausse) sans aucune justification.

La notion de ≪ système complet d'événements ≫ est utilisée (à bon escient) par beaucoup de candidats, mais comprennent-ils vraiment ce que cela signifie ?

La partie sur la manipulation de fonctions génératrices a été sûrement un soulagement pour beaucoup, même si ce sont les indices de sommation qui sont maintenant choisis au hasard. Les calculs sur les séries entières sont plus ou moins maîtrisés et beaucoup de candidats savent calculer l'expression d'une suite arithmético-géométrique, ce qui leur a permis d'obtenir quelques points à cet exercice.

La dernière question revenait à des considérations plus probabilistes et a donc subi le même sort que le début de l'exercice, alors qu'il s'agissait essentiellement de reconnaitre une loi binomiale comme nombre de succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, ce qui devrait normalement relever du réflexe.

Epreuve de Mathématiques B

Présentation générale

Le sujet de cette année se composait de trois parties indépendantes. Il permettait de parcourir une très large partie du programme de PTSI-PT : algèbre linéaire, isométries vectorielles, nombres complexes, surfaces de $\mathbb{R}^3$ et courbes paramétrées de $\mathbb{R}^2$. En contre-partie, le sujet était un peu long.
Contrairement aux années précédentes, les questions de cours n'avaient pas été regroupées en début de sujet, mais réparties à l'intérieur de celui-ci, là où elles avaient leur utilité. Globalement, elles ont été bien moins réussies (et surtout beaucoup plus non traitées) que les années précédentes.
Les résultats sont très contrastés, bien plus que l'an dernier. On trouve un nombre très important (10% environ) de copies ayant obtenu moins de points que le total de points accordé aux questions de cours. On trouve également d'excellentes copies ayant traité avec succès 80% du sujet.

Nous rappelons aux candidats qu'il s'agit principalement d'un sujet de géométrie, et que par conséquent, on ne devrait pas trouver de copies sans aucune figure. Dans ce sujet, en plus des deux tracés demandés, il était possible et même fortement conseillé d'illustrer les réponses par des schémas, en particulier dans les questions II 3 a, III 3 a, III 4 à 6. Si un schéma n'est pas une preuve, il permet d'abord de bien appréhender les objets (points, courbes, ...) manipulés et rend ensuite la formulation des réponses plus aisée à écrire pour le candidat et à comprendre pour le correcteur.
Les candidats ayant illustré à bon escient leurs réponses ont été récompensés.

Présentation des copies

Il est rappelé aux candidats que leurs copies sont destinées à être lues et que des points sont prévus dans le barème pour la présentation des copies. Pour les obtenir, il est nécessaire de respecter les consignes suivantes :

- L'écriture doit être soignée : la lecture de certaines copies s'apparente à un travail de déchiffrement.
- Les résultats doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$ à la règle : seuls 47% des candidats respectent cette consigne de l'énoncé.
- Les candidats doivent éviter les ratures, et pour cela apprendre à utiliser une feuille de brouillon.
- L'orthographe des mots doit être respectée, en particulier lorsqu'ils figurent dans l'énoncé : tangente horizontale, homothétie, intervalle, colonne, parabole, ellipse, aire,

théorème spectral, axe des réels...

• La grammaire ne doit pas être maltraitée : accords genre et nombre, temps de conjugaison (en particulier : participe passé et infinitif), confusion entre les natures des mots (≪ calcul ≫ et ≪ calcule ≫, ≪ sont ≫ et ≪ son ≫, ≪ et ≫ et ≪ est ≫...)...

Rédaction

Il est rappelé aux candidats qu'ils doivent respecter les notations de l'énoncé, en particulier dans la partie I, où la partie réelle d'un nombre complexe z devait être notée $\mathrm{Re}(z)$ ou z_r. S'ils ont besoin de notations qui ne figurent pas dans l'énoncé, ils doivent les définir et utiliser dans la mesure du possible des notations qui ne prêtent pas à confusion : ainsi dans la première partie, les affixes complexes des vecteurs ont parfois été notées x et y et même u, v et i !
On trouve toujours des confusions dans le vocabulaire, les notions ou les symboles mathé matiques utilisés : rang, dimension et cardinal, famille de vecteurs et sous-espace vectoriel engendré par cette famille, droite et vecteur directeur, courbes et surfaces, vecteurs et complexes, applications linéaires et espaces vectoriels, $\in$ et $\subset$, f et $f(x)$...
L'usage des quantificateurs doit aussi être amélioré, leur présence ou leur absence n'est pas anodine : ainsi $\left(at^2 + bt + c = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$ (si $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac \geqslant 0$) alors que $\big(\forall t \in \mathbb{R},\ at^2 + bt + c = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0\big)$, ce qui a posé des problèmes dans les questions II 4 a et II 4 c.
Enfin, rappelons que $\Leftrightarrow$ n'est pas symbole mathématique que l'on met entre deux ≪ trucs mathématiques ≫ pour faire plaisir à son professeur mais que c'est un symbole qui a une signification précise. On ne devrait donc pas trouver dans de très nombreuses copies : $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ y^2 = z^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 + z^2$ ou $S \cap P \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y^2 - z^2 = 1$.
D'autres remarques concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Avant de passer à ce détail, on rappelle aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre.

Première Partie.

1. De nombreuses confusions entre $\dim(u_1, u_2)$ (qui, rappelons le, n'existe pas), $\text{card}(u_1, u_2)$, $\text{rg}(u_1, u_2)$ et $\dim(\text{Vect}(u_1, u_2))$. On trouve trop souvent ≪ $\text{card}(u_1, u_2) = 2$ donc la famille est génératrice ≫. Le produit vectoriel de deux vecteurs du plan (ou pire : de deux complexes) n'existe pas.
   Le déterminant (méthode la plus efficace) - dans une base à préciser - donne directement si la famille est une base ou non sans faire appel à son cardinal.
   La mise sous forme algébrique des 2 complexes du dernier cas est parfois surprenante.
   Quelques candidats ont exploité les affixes complexes soit en regardant si le quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$ est réel, soit en s'intéressant aux arguments de z_1 et z_2. Cette seconde méthode a souvent échoué car les candidats ne regardent que la tangente de l'argument sans faire attention aux signes des parties réelles et imaginaires, car ils ne mentionnent jamais le modulo et enfin (et surtout) car la condition de colinéarité est mal connue.
   Enfin, certains candidats écrivent que (z_1, z_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et beaucoup ne précisent pas de quel ensemble (u_1, u_2) est une base.

2. La très grande majorité des candidats connaît la définition d'un endomorphisme et d'une application linéaire. Beaucoup ont démontré correctement la linéarité de $f_{a,b}$, sauf qu'on regrette que presqu'aucun d'entre eux n'ait justifié que $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$ car $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Mais, très nombreux ont été ceux qui n'ont pas réussi à écrire correctement le lien entre $g_{a,b}$ et $f_{a,b}$ ce qui les a conduit à écrire plus ou moins directement $g_{a,b}(u) = f_{a,b}(z)$. Les candidats ayant réussi à éviter cet écueil ont été récompensés.

3. La réponse à cette question aurait dû commencer par ≪ Démontrons que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ≫. On le voit très rarement, y compris chez ceux qui en ont fait une démonstration correcte.
   Pour les autres, on a en général ≪ il est clair que $G \subset \mathbb{R}^2$ ≫ (quand ce n'est pas $\in$) et ≪ $g_{a,b}$ est linéaire donc G est stable par combinaison linéaire ≫.
   Pour l'égalité entre G et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, il est dommage que certains candidats ayant échoué à prouver la liberté de la famille $(g_{1,0}, g_{i,0}, g_{0,1}, g_{0,i})$, ne nous aient pas dit ce qu'ils en auraient fait.

4. (a) C'est l'homothétie qui est moins la bien reconnue et il manque souvent son rapport. On trouve quelques translations (dont on rappelle que ce ne sont pas des applications linéaires).
   La rotation est la plus souvent reconnue. Dans le cadre d'un plan vectoriel, elle ne possède pas de centre et certainement pas d'axe.
   Quant à la réflexion, à lire les copies des candidats, on peut penser qu'il n'existe pour eux qu'un seul type de symétrie : la symétrie orthogonale. L'axe de cette réflexion est souvent manquant ou inexact.
   On trouve aussi des réponses absurdes : figures géométriques, ensembles, ...

   (b) Toutes les symétries ne sont pas des isométries ; de plus $g_{a,b}$ et $g_{a',b'}$ ne com-

mutent pas. Il n'est pas rare de trouver des natures pour $g_{a,b}$ et $g_{a',b'}$ qui soient différentes de la question précédente (elles sont davantage exactes dans cette seconde question).
Nous n'avons quasiment jamais la nature (et les éléments caractéristiques) de $g_{a,b} \circ g_{a',b'}$ car les candidats ne connaissent pas la nature des isométries du plan (confusion avec l'espace : on trouve beaucoup d'anti-rotations).

5. (a) Cette question de cours n'est pas traitée par 20% des candidats et est réussie par 46%. Parmi les autres, beaucoup ont mal lu l'énoncé et nous donnent les caractérisations d'une symétrie et d'une projection.

   (b) Cette question est très peu traitée et encore moins réussie. La question commençant par « en déduire », en théorie, toute réponse n'utilisant pas la ou les questions précédentes ne convient pas.

6. Beaucoup de candidats ont oublié que a et b étaient des nombres complexes. Signalons qu'il n'y a aucun intérêt à diagonaliser une matrice diagonale.

7. Il manque « à coefficients réels » dans une bonne partie des copies qui citent le théorème spectral. Cet oubli est plus fréquent chez ceux qui ont soupçonné (vu la façon dont était posée la question) qu'il fallait utiliser ce théorème que chez ceux qui ont obtenu la bonne matrice.

8. On lit un peu trop souvent « le polynôme caractéristique est scindé donc la matrice est diagonalisable ».

Deuxième partie.

1. Les natures des intersections sont souvent correctes. Par contre, la rédaction est très régulièrement épouvantable. On rappelle que dans l'espace, une représentation cartésienne de courbe nécessite DEUX équations. Des équivalences comme « $S \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow y^2-z^2=1$ » poussent les examinateurs à se poser la question de la compréhension qu'ont les candidats de la notion d'équations cartésiennes et des objets géométriques qu'elles représentent.
On trouve des centaines de copies citant : hyperboloïdes, paraboloïdes, cônes, cylindres, ce qui surprend puisque la définition et la classification des quadriques est hors programme.
On trouve beaucoup moins de surfaces de révolution et bien peu de candidats prouvent complètement que S en est bien une.
Pour le tracé, on ne demande pas une œuvre d'art, mais pas non plus un dessin tout

petit. On voulait voir les courbes (hyperbole et cercles) du début de la question. Or dans de nombreuses copies, les hyperboles sont absentes et dans d'autres, elles ressemblent beaucoup à deux paraboles.
Terminons en précisant que les correcteurs n'ont rien contre les candidats qui donnent des informations supplémentaires (asymptotes de l'hyperbole, rayon du cercle, …) à condition que celles-ci soient justes, ce qui est rarement le cas (2 coordonnées pour un point de l'espace, 1 équation pour une droite, racine carrée manquante pour le rayon, …).

2. Pour une raison inconnue, de nombreux candidats étudient la symétrie de S par rapport à une plan ou une droite en commençant par faire l'intersection de ce plan ou de cette droite avec S.
Signalons que les intersections de S avec les plans d'équation $z = a$ et $z = -a$ ($a \neq 0$), ne sont pas égales (ou identiques ou les mêmes) et n'ont pas la même équation. Quant à dire qu'elles sont symétriques, cela revient à la question de départ.
Ces questions sont souvent très mal rédigées, les réponses tenant plus d'une « recette » que d'une véritable compréhension de ce qu'il faut faire. Précisons qu'il est inutile et contre-productif de démontrer un résultat que l'énoncé demande d'admettre. Beaucoup de candidats ont su exploiter que la surface est de révolution (précisons d'ailleurs que l'axe est défini par un point et un vecteur directeur et pas uniquement par ce dernier), même si certains l'ont découvert pour cette question et que la droite proposée était l'intersection de deux plans de symétrie.

3. (a) Les deux tiers des candidats soit passent la question, soit ne proposent rien qui ressemble à une surface de révolution (beaucoup démontrent seulement - en ont-il conscience ? - à l'aide d'équivalence - toutes fausses - que $\Delta \subset S$).
Pour les autres, on trouve beaucoup de notations A, P, M, $\vec{u}$, $\vec{n}$, x, X, x_0,… dont nous avons beaucoup de mal à savoir ce qu'elles représentent. Un petit dessin aurait pu bien aider. Beaucoup d'équivalences se révèlent fausses au bout de quelques lignes (élévation au carré).
   (b) Pour justifier qu'une surface est réglée, il faut en donner une famille de génératrices. Les candidats nous les donnent bien peu souvent (une description nous suffisait) et quand on en a une, elle se limite souvent à … Δ. Ceux qui s'en sortent le mieux sont ceux qui ont commencé la question précédente en donnant une représentation paramétrique de Σ … à condition de ne pas être trop regardant sur les rôles respectifs de t et θ.

4. (a) Ce n'est pas parce qu'aucune génératrice n'est horizontale, qu'il n'y a pas de droites horizontales incluses dans S.
Ceux qui ont utilisé la question 1 ont donné une réponse correcte en 2 lignes (attention cependant, contenir et être égal, ce n'est pas pareil).
   (b) Il s'agissait de justifier que l'on pouvait prendre $c = 0$ et $\gamma = 1$. Cela n'a pas toujours été évident. Certains ont démontré que la droite proposée n'était pas horizontale.

(c) Des problèmes de quantificateur et surtout une méconnaissance des caractérisations des matrices de $O(2)$ ont régulièrement fait échouer les candidats.

(d) Moins de la moitié des candidats traitent cette question de cours. Seuls 12% donnent une réponse complète. Si les rotations et les matrices associées sont souvent correctement citées, les matrices de réflexions ne semblent connues que dans une base adaptée.
Enfin, l'énoncé demandait explicitement de ne pas donner les éléments caractéristiques. Alors pourquoi prendre le risque de donner ces éléments qui se sont avérés bien souvent faux... ?

(e) Même les candidats ayant donné une réponse (juste ou fausse) à la question précédente ont peu traité cette question alors qu'il suffisait de remplacer a, b, α et β par les coefficients des matrices précédentes.

Troisième partie.

1. (a) Quelques confusions avec la forme algébrique. Rares sont ceux qui précisent que $\theta \geqslant 0$.
   (b) Les formules utilisées par certains candidats pour calculer la dérivée de $u \times v$, $\exp(u)$ et même cos laissent les correcteurs perplexes.
   (c) Quelques normes égales à des vecteurs, des complexes ou des réels négatifs. Les correcteurs ne finissent pas les calculs à la place des candidats.
2. (a) La dérivée de f (et pas uniquement à cause de tan) ainsi que la valeur de $f(2\pi)$ sont parfois surprenantes. Signalons que f n'est pas croissante sur D mais sur chaque intervalle inclus dans D.
   (b) L'unicité est souvent oubliée (en particulier celle de θ_0), y compris par ceux qui citent la stricte monotonie.
   On cherche bien trop souvent l'hypothèse de continuité dans le théorème des valeurs intermédiaires (ou de la bijection). Précisons qu'il n'est pas possible de les appliquer sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
   (c) On attend au minimum un lien entre les tangentes horizontales, les racines de y' et celles de f. Si en plus, ces liens sont des équivalences correctement justifiées...
3. (a) Nous avons trouvé une demi-douzaine de solutions répondant au problème. Certaines analytiques, d'autres géométriques, certaines plus précises que d'autres (arrondis), d'autres pas applicables à θ_1. Les méthodes analytiques se sont souvent arrêtées au calcul des coordonnées sans donner le principe de construction. Nous aurions apprécié une figure illustrant la construction proposée, ainsi davantage de candidats se seraient rendus compte que les constructions qu'ils proposent donnent 2 points et qu'il faut en choisir un.
   Précisons que l'auteur du sujet n'a jamais envisagé de demander aux candidats d'extraire une racine carrée à la main et avec 3 chiffes après la virgule.
   (b) La question a été davantage traitée que l'an dernier. Le barème prend en compte le temps nécessaire à ce tracé.
   On recherche trop souvent les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ qui, on le rappelle, sont de longueur 1 unité. Certains candidats ne graduent ou ne tracent même pas les axes. Un minimum de réflexion est nécessaire avant d'orienter sa feuille (portrait ou paysage) et de positionner le centre du repère. Le point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est régulièrement oublié et sa tangente encore plus souvent. Il n'est pas rare de trouver une courbe qui n'est pas tangente à ses tangentes.

Les questions suivantes ayant été traitées par relativement peu de candidats, et pas forcément les meilleurs, les commentaires sont à relativiser.

4. (a) Question peu et mal traitée, les candidats n'ayant pas compris le rôle des demi-droites.
   (b) « Bien choisies » ne veut pas dire « devinées » en fonction du résultat attendu.
   (c) Des démonstrations utilisant $(p+1)^3$ et les sommes télescopiques.
   Les récurrences sont parfois initialisées $p = 1$ ou $p = 2$ et quelques tentatives

d'arnaque dans l'hérédité, mais presque tous les candidats qui ont traité cette récurrence en ont compris le principe. On regrette cependant que de nombreux autres ne l'aient pas faite (elle doit pourtant figurer dans tous les cahiers de cours ou de TD de PTSI) au profit de la question suivante. Ils ont eu tort car …

(d) …on déplore que de nombreux candidats ayant la mauvaise expression de $\mathcal{A}$ en fonction des $\mathcal{A}_k$ trouvent quand même le bon encadrement. Le résultat étant donné, il était impératif de détailler les calculs (changement d'indice sur la somme en particulier). Le théorème d'encadrement (pas nécessaire ici) est plus que douteux dans de nombreuses copies.

5. Des confusions avec la normale ou les courbes d'équation $y = f(x)$ ainsi qu'avec la longueur d'une courbe paramétrée. La longueur du segment $[ON]$ se note ON

6. Le théorème de Thalès est bien loin dans les souvenirs des candidats…

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

Le sujet portait cette année sur le calcul de l'intégrale de Dirichlet. Il comportait un certain nombre de questions de cours, et des questions faciles, ce qui a permis aux candidats de répondre à un nombre important de questions.
A côté, d'autres questions étaient destinées à valoriser les candidats soigneux et rigoureux ; d'autres, plus difficiles, à départager les très bons candidats.

Nous souhaitons attirer l'attention des candidats sur le maniement des valeurs absolues, qui est souvent incorrect ou approximatif. L'utilité des valeurs absolues ne semble pas claire pour beaucoup, elles sont omises alors que c'est nécessaire, ou misesun peu au hasard dans les calculs.

D'autre part, il y a de plus en plus d'erreurs d'≪ écriture mathématique ≫ : on voit trop souvent des intégrales qui n'ont pas d'élément différentiel, ou encore des limites (quand l'entier n tend vers l'infini par exemple) qui dépendent de n.

Enfin, l'utilisation inutile des raisonnements par récurrence est trop fréquente.

Les copies ne sont pas toutes bien présentées. Les correcteurs ont noté une nette dégradation de la présentation. Rares sont les copies correctement écrites. Au contraire, elles sont en général malpropres, raturées, écrites avec un stylo à bille qui bave, ou qui est à bout de course, donnant une écriture d'une pâleur extrême qui rend la correction quasiment impossible. Les lignes ne sont pas toujours respectées. Les lettres ne sont pas formées, la lecture devient extrêmement pénible, au point de se demander ce que le candidat veut dire.

Quant à l'orthographe ... Celle de la terminologie mathématique usuelle n'est pas toujours maîtrisée. Voici quelques échantillons trouvés dans les copies :

≪ un segement ≫ ;

≪ on concidère ≫ ;

≪ le théorème des agroissement fini (sans aucun ≪ s ≫) ≫ ;

≪ le théorème de Rholle ≫ ;

au choix : ≪ la règle de d'Alember, d'Allembert, d'Albert ≫ ;

≪ le therme ≫ ;

≪ anule ≫ ;

« un interval » (pluriel : « des intervals »).

Tout ce qui tourne autour du verbe finir a été l'occasion de fautes multiples :

« le théorème des accroisements finit » ;

« le rayon de convergence est infinie » ;

« un intervalle finis » ; « la fonction admet des limites finit ».

Enfin, même le verbe être n'est pas épargné. Citons :

« ... sur sont intervalle de convergence » » ;

« c'est deux fonctions sont continues ».

Comme l'an passé, nous souhaitons faire quelques rappels de bon sens :

i. Il faut produire un raisonnement : recopier le résultat de la question n'est pas une preuve Si le résultat attendu est donné dans l'énoncé, il faut prêter une attention particulière à la rédaction de la solution.

ii. Certains candidats manquent d'honnêteté intellectuelle en essayant de tromper le correcteur, effectuant un calcul manifestement faux mais en concluant avoir répondu. Par exemple, en partie II, question 1.a., avec des démonstrations par récurrence fausses.

Remarques particulières

Préambule

1. Peu de candidats ont justifié qu'une fonction continue sur un segment y est bornée. Les correcteurs ont trouvé dans les copies beaucoup de justifications fantaisistes, faisant appel au théorème des accroissements finis, au théorème de Rolle, disant que la fonction est lipschitzienne, ou, encore, un recopiage de l'énoncé, sans aucune justification à la clé.
   Parmi le petit nombre de candidats ne parlant pas d'accroissements finis, les théorèmes parlent de fonction continue sur un intervalle ou sur un fermé. Le mot ≪ segment ≫ ou ≪ fermé borné ≫ est très peu présent.

   Beaucoup de candidats omettent les valeurs absolues, et se contentent d'écrire une majoration de $|f'(t)|$.

2. Peu de candidats ont répondu correctement à cette question. Dans de très nombreuses copies, on trouve des inégalités mettant en jeu des nombres complexes ... D'autre part, peu de candidats semblent savoir que $|e^{i\,k\,t}| = 1$.

3. Si une majorité de candidats a traité correctement cette question. Toutefois, l'intégration par parties ne semble absolument pas maîtrisée par certains candidats. De même, le crochet converge vers 0 sans aucune preuve très souvent. On lit aussi ≪ $e^{i\,k\,t}$ est borné ≫, sans précision sur le fait que l'on considère $k \mapsto e^{i\,k\,t}$ et non $t \mapsto e^{i\,k\,t}$.

Partie I

1. (a) *i.* Si cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats, nous rappelons qu'un résultat sans aucune justification n'a pas de valeur. On lit parfois que ≪ l'intégrale est prolongeable par continuité ≫, ou que ≪ la fonction converge ≫.

   ii. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Mais nous rappelons là encore qu'un résultat sans aucune justification n'a pas de valeur

   iii. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Dans le reste des copies, le résultat est trop souvent donné sans aucune preuve.

   (b) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats, soit en utilisant directement la formule de trigonométrie donnant, pour tout réel t, l'expression de $\sin^2 t$ en fonction de $\cos(2\,t)$, soit en passant en exponentielles complexes. Quelques candidats ont eu recours à une intégration par parties, qui permettait aussi d'obtenir la valeur de I_1.

(c) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats, là encore, soit en utilisant les formules de trigonométrie, soit en procédant à une intégration par parties.

(d) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats. Quelques candidats veulent conclure avec une récurrence.

2. Cette question a été traitée par une grande partie des candidats. Toutefois, certains majorent le sinus par 1, et concluent sur la convergence des intégrales en affirmant que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t}$ est une intégrale de Riemann convergente ...
Des candidats appliquent le résultat avec $n = 1$ au lieu de $n = \dfrac{1}{2}$. Il est étonnant que certains candidats sachent répondre pour J_n, mais pas pour l'autre intégrale.

3. Cette question n'a été correctement et entièrement traitée que par peu de candidats. Si le prolongement par continuité de la fonction ϕ à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$ n'a pas posé de problème, les correcteurs n'ont trouvé que peu de copies où l'étude de la continuité de ϕ à droite en zéro est faite. Beaucoup de candidats effectuent un développement limité à l'ordre 1, et soustraient ou additionnent des équivalents... ce qui n'est pas bien.
En ce qui concerne le caractère C^1, il est, très souvent omis. Quelques candidats déterminent la limite de ϕ' à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$ (souvent avec une erreur de signe), mais n'étudient pas correctement la limite de ϕ' à droite en 0.
Les très bonnes copies ont traité intégralement cette question, en complétant l'utilisation du théorème de la limite de la dérivée par une étude du taux d'accroissement à droite en 0 et à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.

4. Si cette question a été traitée par une grande partie des candidats, nous rappelons que, pour tout réel t, $\sin(2\,n\,t)$ est la partie imaginaire de l'exponentielle complexe $e^{2\,i\,n\,t}$, et non sa partie réelle. Pour certains candidats, il y a visiblement égalité entre les deux quantités.

5. (a) Cette question (classique) n'a pas été traitée correctement par tous les candidats : nous rappelons que pour effectuer l'intégration par parties, il fallait vérifier l'existence de la limite de $-\dfrac{\cos t}{t}$ en l'infini, et de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$.
Nous souhaitons insister, cette année encore, sur le fait que le critère de comparaison n'est valide que si les fonctions sont positives.

Aussi, trop peu de candidats parlent de convergence absolue.

Enfin, il semble que, pour certains candidats, le sinus soit la dérivée de la valeur absolue du cosinus.

(b) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats.

(c) Si cette question a été traitée par une grande partie des candidats, les correcteurs ont trouvé, dans d'autres, des limites de J_n dépendant de n, voire égales à I_n.

Partie II

1. (a) Si ette question a été traitée par une grande partie des candidats, trop souvent la formule est donnée sans justification. Rappelons que lorsque la formule est dans l'énoncé, les correcteurs sont pointilleux sur la preuve. La relation de Chasles est souvent oubliée, et parfois remplacée par la linéarité de l'intégrale.

   Certains candidats ont cru nécessaire d'effectuer une démonstration par récurrence, compliquée.

   (b) Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats. Déjà, beaucoup de candidats n'emploient pas la terminologie correcte, et/ou confondent la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{k\,\pi}^{(k+1)\,\pi} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$, avec celle de la série de terme général $\displaystyle\int_{k\,\pi}^{(k+1)\,\pi} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$, ce qui n'est pas du tout la même chose. Ensuite, les valeurs absolues sont, le plus souvent, absentes. D'autres candidats donnent des équivalences complètement fausses entre $\dfrac{\cos t}{t^2}$ et $\dfrac{1}{t^2}$ en l'infini, ou affirment que lorsque l'entier k tend vers l'infini, $\displaystyle\int_{k\,\pi}^{(k+1)\,\pi} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ tend vers zéro, et concluent alors sur la convergence de la série de terme général $\displaystyle\int_{k\,\pi}^{(k+1)\,\pi} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$.

   Les correcteurs ont aussi trouvé quelques perles mathématiques :

   ≪ si $t > +\infty$, la série diverge ≫ ;
   ≪ la fonction cosinus est monotone et de signe constant (sur $\mathbb{R}^+$) ≫ ;
   ≪ l'intervalle diverge ≫.

   En ce qui concerne la fin de la question, plus difficile, elle a été traitée dans les très bonnes copies.

2. (a) Cette question n'a pas été traitée correctement par tous les candidats. Déjà, tous n'appliquent pas correctement le critère de d'Alembert. Les correcteurs

ont trouvé dans les copies beaucoup d'équivalents fantaisistes, ainsi que des signes « moins » dans des résultats issus d'une valeur absolue. De nombreux candidats affirment aussi que le quotient tend vers 0 sans preuve (équivalent ou autre).

(b) Cette question n'a pas été traitée correctement par tous les candidats.
La formule est souvent donnée juste, mais pas vérifiée pour $t = 0$ (ou alors, en essayant de faire croire à un résultat non démontré), ou sans le rayon de convergence.
Certains candidats pensent que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est développable en série entière.

(c) Cette question a été traitée correctement par une grande partie des candidats. Mais encore une fois, la formule est donnée dans l'énoncé, et de nombreux candidats se content de la recopier. On attend au moins la notion d'intégration terme à terme, ou bien voir apparaitre une primitive de la fonction $t \mapsto t^{2n}$.

3. (a) Cette question n'a pas été traitée correctement par tous les candidats. Déjà, beaucoup de candidats ont cru qu'il fallait donner le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel x, associe $e^{i\,x}$, ou e^x. D'autres ont donné des réponses complètement fantaisistes, des rayons de convergence valant 0, ou 1, voire des développements limités.

(b) Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats. La manipulation de l'inégalité triangulaire est souvent mal maiîtrisée : on lit souvent « $|\cos(n\,t)| \leq 1$ et donc $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots \cos(n\,t)\,dt\right| \leq \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots 1\,dt\right|$ ».
De nombreux candidats affirment que $\left|\mathcal{R}e\left(e^{-i\,n\,t}\right)\right| \leq 1$ sans expliquer pourquoi.
Certains candidats pensent enfin que le module de la partie réelle est égal à la partie réelle du module.

(c) Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats.

(d) Cette question a été traitée correctementpar la majorité des candidats.
Pour le reste, nous précisons que « $\pm\frac{1}{n}$ » n'est pas une réponse valable : il faut préciser quand le signe est positif ou négatif.

(e) Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats. Quelques candidats ont bien pensé à sortir le $\frac{\pi}{2}$.

(f) *i.* Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats. Ceux qui ont cherché à appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres ont parfois donné a priori et sans aucune justification correcte une majoration de l'intégrande (pas de tentative de vérification). Peu ont noté que l'on intégrait sur un segment.

ii. Cette question a été traitée correctementpar la majorité des candidats. Les correcteurs ont cependant trouvé des copies où les candidats ne semblent pas savoir dériver la fonction $t \mapsto e^{-a\cos t}$ par rapport à t.

iii. Cette question a été traitée correctement par la majorité des candidats.

iv. Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats, et a permis de départager les meilleurs copies. Certains candidats ont donné une limite qui dépend de a.

(g) Les candidats qui ont traité cette question l'ont fait avec beaucoup de soin.

(h) La première partie de cette question a été traitée par une grande partie des candidats, par contre, il n'en est pas de même de la fin.
En général, les candidats ayant donné la partie réelle en e. ont aussi bien répondu à cette question.
Pas mal de candidats ayant admis la valeur de $\lim_{a \to 0} F(a)$ ont grapillé des points.

(i) Cette question, qui a permis de départager les meilleurs candidats, n'a été que très peu traitée.