Epreuve de Mathématiques B

Présentation générale

Le sujet de cette année se composait de trois parties indépendantes. Il permettait de parcourir une très large partie du programme de PTSI-PT : algèbre linéaire, isométries vectorielles, nombres complexes, surfaces de $\mathbb{R}^3$ et courbes paramétrées de $\mathbb{R}^2$. En contre-partie, le sujet était un peu long.
Contrairement aux années précédentes, les questions de cours n'avaient pas été regroupées en début de sujet, mais réparties à l'intérieur de celui-ci, là où elles avaient leur utilité. Globalement, elles ont été bien moins réussies (et surtout beaucoup plus non traitées) que les années précédentes.
Les résultats sont très contrastés, bien plus que l'an dernier. On trouve un nombre très important (10% environ) de copies ayant obtenu moins de points que le total de points accordé aux questions de cours. On trouve également d'excellentes copies ayant traité avec succès 80% du sujet.

Nous rappelons aux candidats qu'il s'agit principalement d'un sujet de géométrie, et que par conséquent, on ne devrait pas trouver de copies sans aucune figure. Dans ce sujet, en plus des deux tracés demandés, il était possible et même fortement conseillé d'illustrer les réponses par des schémas, en particulier dans les questions II 3 a, III 3 a, III 4 à 6. Si un schéma n'est pas une preuve, il permet d'abord de bien appréhender les objets (points, courbes, . . .) manipulés et rend ensuite la formulation des réponses plus aisée à écrire pour le candidat et à comprendre pour le correcteur.
Les candidats ayant illustré à bon escient leurs réponses ont été récompensés.

Présentation des copies

Il est rappelé aux candidats que leurs copies sont destinées à être lues et que des points sont prévus dans le barème pour la présentation des copies. Pour les obtenir, il est nécessaire de respecter les consignes suivantes :

- L'écriture doit être soignée : la lecture de certaines copies s'apparente à un travail de déchiffrement.
- Les résultats doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$ à la <u>règle</u> : seuls 47% des candidats respectent cette consigne de l'énoncé.
- Les candidats doivent éviter les ratures, et pour cela apprendre à utiliser une feuille de brouillon.
- L'orthographe des mots doit être respectée, en particulier lorsqu'ils figurent dans l'énoncé : tangente horizontale, homothétie, intervalle, colonne, parabole, ellipse, aire,

théorème spectral, axe des réels…

• La grammaire ne doit pas être maltraitée : accords genre et nombre, temps de conjugaison (en particulier : participe passé et infinitif), confusion entre les natures des mots (≪ calcul ≫ et ≪ calcule ≫, ≪ sont ≫ et ≪ son ≫, ≪ et ≫ et ≪ est ≫…)…

Rédaction

Il est rappelé aux candidats qu'ils doivent respecter les notations de l'énoncé, en particulier dans la partie I, où la partie réelle d'un nombre complexe z devait être notée $\mathrm{Re}(z)$ ou z_r. S'ils ont besoin de notations qui ne figurent pas dans l'énoncé, ils doivent les définir et utiliser dans la mesure du possible des notations qui ne prêtent pas à confusion : ainsi dans la première partie, les affixes complexes des vecteurs ont parfois été notées x et y et même u, v et i !
On trouve toujours des confusions dans le vocabulaire, les notions ou les symboles mathé matiques utilisés : rang, dimension et cardinal, famille de vecteurs et sous-espace vectoriel engendré par cette famille, droite et vecteur directeur, courbes et surfaces, vecteurs et complexes, applications linéaires et espaces vectoriels, $\in$ et $\subset$, f et $f(x)$…
L'usage des quantificateurs doit aussi être amélioré, leur présence ou leur absence n'est pas anodine : ainsi $\left(at^2+bt+c=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ (si $a\neq 0$ et $b^2-4ac\geqslant 0$) alors que $\big(\forall t\in\mathbb{R},\ at^2+bt+c=0 \Leftrightarrow a=b=c=0\big)$, ce qui a posé des problèmes dans les questions II 4 a et II 4 c.
Enfin, rappelons que $\Leftrightarrow$ n'est pas symbole mathématique que l'on met entre deux ≪ trucs mathématiques ≫ pour faire plaisir à son professeur mais que c'est un symbole qui a une signification précise. On ne devrait donc pas trouver dans de très nombreuses copies : $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2=1 \\ y^2=z^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2+y^2=1+z^2$ ou $S\cap P \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-z^2=1 \\ x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y^2-z^2=1$.
D'autres remarques concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Avant de passer à ce détail, on rappelle aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre.

Première Partie.

1. De nombreuses confusions entre $\dim(u_1, u_2)$ (qui, rappelons le, n'existe pas), $\mathrm{card}(u_1, u_2)$, $\mathrm{rg}(u_1, u_2)$ et $\dim(\mathrm{Vect}(u_1, u_2))$. On trouve trop souvent « $\mathrm{card}(u_1, u_2) = 2$ donc la famille est génératrice ». Le produit vectoriel de deux vecteurs du plan (ou pire : de deux complexes) n'existe pas.
   Le déterminant (méthode la plus efficace) - dans une base à préciser - donne directement si la famille est une base ou non sans faire appel à son cardinal.
   La mise sous forme algébrique des 2 complexes du dernier cas est parfois surprenante.
   Quelques candidats ont exploité les affixes complexes soit en regardant si le quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$ est réel, soit en s'intéressant aux arguments de z_1 et z_2. Cette seconde méthode a souvent échoué car les candidats ne regardent que la tangente de l'argument sans faire attention aux signes des parties réelles et imaginaires, car ils ne mentionnent jamais le modulo et enfin (et surtout) car la condition de colinéarité est mal connue.
   Enfin, certains candidats écrivent que (z_1, z_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et beaucoup ne précisent pas de quel ensemble (u_1, u_2) est une base.

2. La très grande majorité des candidats connaît la définition d'un endomorphisme et d'une application linéaire. Beaucoup ont démontré correctement la linéarité de $f_{a,b}$, sauf qu'on regrette que presqu'aucun d'entre eux n'ait justifié que $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$ car $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Mais, très nombreux ont été ceux qui n'ont pas réussi à écrire correctement le lien entre $g_{a,b}$ et $f_{a,b}$ ce qui les a conduit à écrire plus ou moins directement $g_{a,b}(u) = f_{a,b}(z)$. Les candidats ayant réussi à éviter cet écueil ont été récompensés.

3. La réponse à cette question aurait dû commencer par « Démontrons que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ». On le voit très rarement, y compris chez ceux qui en ont fait une démonstration correcte.
   Pour les autres, on a en général « il est clair que $G \subset \mathbb{R}^2$ » (quand ce n'est pas $\in$) et « $g_{a,b}$ est linéaire donc G est stable par combinaison linéaire ».
   Pour l'égalité entre G et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, il est dommage que certains candidats ayant échoué à prouver la liberté de la famille $(g_{1,0}, g_{i,0}, g_{0,1}, g_{0,i})$, ne nous aient pas dit ce qu'ils en auraient fait.

4. (a) C'est l'homothétie qui est moins la bien reconnue et il manque souvent son rapport. On trouve quelques translations (dont on rappelle que ce ne sont pas des applications linéaires).
   La rotation est la plus souvent reconnue. Dans le cadre d'un plan vectoriel, elle ne possède pas de centre et certainement pas d'axe.
   Quant à la réflexion, à lire les copies des candidats, on peut penser qu'il n'existe pour eux qu'un seul type de symétrie : la symétrie orthogonale. L'axe de cette réflexion est souvent manquant ou inexact.
   On trouve aussi des réponses absurdes : figures géométriques, ensembles, ...

   (b) Toutes les symétries ne sont pas des isométries ; de plus $g_{a,b}$ et $g_{a',b'}$ ne com-

mutent pas. Il n'est pas rare de trouver des natures pour $g_{a,b}$ et $g_{a',b'}$ qui soient différentes de la question précédente (elles sont davantage exactes dans cette seconde question).
Nous n'avons quasiment jamais la nature (et les éléments caractéristiques) de $g_{a,b} \circ g_{a',b'}$ car les candidats ne connaissent pas la nature des isométries du plan (confusion avec l'espace : on trouve beaucoup d'anti-rotations).

5. (a) Cette question de cours n'est pas traitée par 20% des candidats et est réussie par 46%. Parmi les autres, beaucoup ont mal lu l'énoncé et nous donnent les caractérisations d'une symétrie et d'une projection.

   (b) Cette question est très peu traitée et encore moins réussie. La question commençant par « en déduire », en théorie, toute réponse n'utilisant pas la ou les questions précédentes ne convient pas.

6. Beaucoup de candidats ont oublié que a et b étaient des nombres complexes. Signalons qu'il n'y a aucun intérêt à diagonaliser une matrice diagonale.

7. Il manque « à coefficients réels » dans une bonne partie des copies qui citent le théorème spectral. Cet oubli est plus fréquent chez ceux qui ont soupçonné (vu la façon dont était posée la question) qu'il fallait utiliser ce théorème que chez ceux qui ont obtenu la bonne matrice.

8. On lit un peu trop souvent « le polynôme caractéristique est scindé donc la matrice est diagonalisable ».

Deuxième partie.

1. Les natures des intersections sont souvent correctes. Par contre, la rédaction est très régulièrement épouvantable. On rappelle que dans l'espace, une représentation cartésienne de courbe nécessite DEUX équations. Des équivalences comme « $S \cap P \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2-z^2=1 \\ x=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y^2-z^2=1$ » poussent les examinateurs à se poser la question de la compréhension qu'ont les candidats de la notion d'équations cartésiennes et des objets géométriques qu'elles représentent.
On trouve des centaines de copies citant : hyperboloïdes, paraboloïdes, cônes, cylindres, ce qui surprend puisque la définition et la classification des quadriques est hors programme.
On trouve beaucoup moins de surfaces de révolution et bien peu de candidats prouvent complètement que S en est bien une.
Pour le tracé, on ne demande pas une œuvre d'art, mais pas non plus un dessin tout

petit. On voulait voir les courbes (hyperbole et cercles) du début de la question. Or dans de nombreuses copies, les hyperboles sont absentes et dans d'autres, elles ressemblent beaucoup à deux paraboles.
Terminons en précisant que les correcteurs n'ont rien contre les candidats qui donnent des informations supplémentaires (asymptotes de l'hyperbole, rayon du cercle, ...) à condition que celles-ci soient justes, ce qui est rarement le cas (2 coordonnées pour un point de l'espace, 1 équation pour une droite, racine carrée manquante pour le rayon, ...).

2. Pour une raison inconnue, de nombreux candidats étudient la symétrie de S par rapport à une plan ou une droite en commençant par faire l'intersection de ce plan ou de cette droite avec S.
Signalons que les intersections de S avec les plans d'équation $z = a$ et $z = -a$ ($a \neq 0$), ne sont pas égales (ou identiques ou les mêmes) et n'ont pas la même équation. Quant à dire qu'elles sont symétriques, cela revient à la question de départ.
Ces questions sont souvent très mal rédigées, les réponses tenant plus d'une « recette » que d'une véritable compréhension de ce qu'il faut faire. Précisons qu'il est inutile et contre-productif de démontrer un résultat que l'énoncé demande d'admettre. Beaucoup de candidats ont su exploiter que la surface est de révolution (précisons d'ailleurs que l'axe est défini par un point et un vecteur directeur et pas uniquement par ce dernier), même si certains l'ont découvert pour cette question et que la droite proposée était l'intersection de deux plans de symétrie.

3. (a) Les deux tiers des candidats soit passent la question, soit ne proposent rien qui ressemble à une surface de révolution (beaucoup démontrent seulement - en ont-il conscience ? - à l'aide d'équivalence - toutes fausses - que $\Delta \subset S$).
Pour les autres, on trouve beaucoup de notations A, P, M, $\vec{u}$, $\vec{n}$, x, X, x_0,... dont nous avons beaucoup de mal à savoir ce qu'elles représentent. Un petit dessin aurait pu bien aider. Beaucoup d'équivalences se révèlent fausses au bout de quelques lignes (élévation au carré).
(b) Pour justifier qu'une surface est réglée, il faut en donner une famille de génératrices. Les candidats nous les donnent bien peu souvent (une description nous suffisait) et quand on en a une, elle se limite souvent à ... Δ. Ceux qui s'en sortent le mieux sont ceux qui ont commencé la question précédente en donnant une représentation paramétrique de Σ ... à condition de ne pas être trop regardant sur les rôles respectifs de t et θ.

4. (a) Ce n'est pas parce qu'aucune génératrice n'est horizontale, qu'il n'y a pas de droites horizontales incluses dans S.
Ceux qui ont utilisé la question 1 ont donné une réponse correcte en 2 lignes (attention cependant, contenir et être égal, ce n'est pas pareil).

(b) Il s'agissait de justifier que l'on pouvait prendre $c = 0$ et $\gamma = 1$. Cela n'a pas toujours été évident. Certains ont démontré que la droite proposée n'était pas horizontale.

(c) Des problèmes de quantificateur et surtout une méconnaissance des caractérisations des matrices de $O(2)$ ont régulièrement fait échouer les candidats.

(d) Moins de la moitié des candidats traitent cette question de cours. Seuls 12% donnent une réponse complète. Si les rotations et les matrices associées sont souvent correctement citées, les matrices de réflexions ne semblent connues que dans une base adaptée.
Enfin, l'énoncé demandait explicitement de ne pas donner les éléments caractéristiques. Alors pourquoi prendre le risque de donner ces éléments qui se sont avérés bien souvent faux... ?

(e) Même les candidats ayant donné une réponse (juste ou fausse) à la question précédente ont peu traité cette question alors qu'il suffisait de remplacer a, b, α et β par les coefficients des matrices précédentes.

Troisième partie.

1. (a) Quelques confusions avec la forme algébrique. Rares sont ceux qui précisent que $\theta \geqslant 0$.
   (b) Les formules utilisées par certains candidats pour calculer la dérivée de $u \times v$, $\exp(u)$ et même cos laissent les correcteurs perplexes.
   (c) Quelques normes égales à des vecteurs, des complexes ou des réels négatifs. Les correcteurs ne finissent pas les calculs à la place des candidats.
2. (a) La dérivée de f (et pas uniquement à cause de tan) ainsi que la valeur de $f(2\pi)$ sont parfois surprenantes. Signalons que f n'est pas croissante sur D mais sur chaque intervalle inclus dans D.
   (b) L'unicité est souvent oubliée (en particulier celle de θ_0), y compris par ceux qui citent la stricte monotonie.
   On cherche bien trop souvent l'hypothèse de continuité dans le théorème des valeurs intermédiaires (ou de la bijection). Précisons qu'il n'est pas possible de les appliquer sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
   (c) On attend au minimum un lien entre les tangentes horizontales, les racines de y' et celles de f. Si en plus, ces liens sont des équivalences correctement justifiées...
3. (a) Nous avons trouvé une demi-douzaine de solutions répondant au problème. Certaines analytiques, d'autres géométriques, certaines plus précises que d'autres (arrondis), d'autres pas applicables à θ_1. Les méthodes analytiques se sont souvent arrêtées au calcul des coordonnées sans donner le principe de construction. Nous aurions apprécié une figure illustrant la construction proposée, ainsi davantage de candidats se seraient rendus compte que les constructions qu'ils proposent donnent 2 points et qu'il faut en choisir un.
   Précisons que l'auteur du sujet n'a jamais envisagé de demander aux candidats d'extraire une racine carrée à la main et avec 3 chiffes après la virgule.
   (b) La question a été davantage traitée que l'an dernier. Le barème prend en compte le temps nécessaire à ce tracé.
   On recherche trop souvent les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ qui, on le rappelle, sont de longueur 1 unité. Certains candidats ne graduent ou ne tracent même pas les axes. Un minimum de réflexion est nécessaire avant d'orienter sa feuille (portrait ou paysage) et de positionner le centre du repère. Le point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est régulièrement oublié et sa tangente encore plus souvent. Il n'est pas rare de trouver une courbe qui n'est pas tangente à ses tangentes.

Les questions suivantes ayant été traitées par relativement peu de candidats, et pas forcément les meilleurs, les commentaires sont à relativiser.

4. (a) Question peu et mal traitée, les candidats n'ayant pas compris le rôle des demi-droites.
   (b) ≪ Bien choisies ≫ ne veut pas dire ≪ devinées ≫ en fonction du résultat attendu.
   (c) Des démonstrations utilisant $(p+1)^3$ et les sommes télescopiques.
   Les récurrences sont parfois initialisées $p = 1$ ou $p = 2$ et quelques tentatives

d'arnaque dans l'hérédité, mais presque tous les candidats qui ont traité cette récurrence en ont compris le principe. On regrette cependant que de nombreux autres ne l'aient pas faite (elle doit pourtant figurer dans tous les cahiers de cours ou de TD de PTSI) au profit de la question suivante. Ils ont eu tort car ...

(d) ... on déplore que de nombreux candidats ayant la mauvaise expression de $\mathcal{A}$ en fonction des $\mathcal{A}_k$ trouvent quand même le bon encadrement. Le résultat étant donné, il était impératif de détailler les calculs (changement d'indice sur la somme en particulier). Le théorème d'encadrement (pas nécessaire ici) est plus que douteux dans de nombreuses copies.

5. Des confusions avec la normale ou les courbes d'équation $y = f(x)$ ainsi qu'avec la longueur d'une courbe paramétrée. La longueur du segment $[ON]$ se note ON
6. Le théorème de Thalès est bien loin dans les souvenirs des candidats...