Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

L'épreuve était composée d'un problème d'algèbre linéaire (découpé en trois parties) et d'un exercice de probabilités relativement long.

La qualité des copies est très disparate, allant de la copie quasi-vide à la copie traitant l'intégralité du sujet en ayant quasiment la note maximale. Le sujet s'est révélé très classant. On regrettera toujours un niveau moyen assez faible et une présentation des copies généralement déplorable, avec des idées jetées pèle-mêle, sans structuration logique, et des résultats affirmés tels quels, notamment en probabilités, sans aucune justification.

Problème d'algèbre linéaire

Ce problème étudiait la diagonalisibilité des matrices A et de A^2.

Partie I

Cette première partie consistait à diagonaliser explicitement deux matrices te taille 3×3 (A et A^2), l'une ayant 3 valeurs propres simples l'autre ayant une valeur propre double et une simple, puis de démontrer que si la matrice A est diagonalisable, alors A^2 l'est aussi.

Cette partie ne comportait aucune difficulté particulière et était essentiellement calculatoire (avec des calculs relativement simples). Elle a permis d'éliminer les trop nombreux candidats qui ne connaissent toujours pas les conditions de diagonalisation d'une matrice alors qu'il s'agit d'un des résultats majeurs du programme d'algèbre linéaire de seconde année, et que cela est demandé quasiment chaque année lors de cette épreuve !

Bien que simples, ces calculs ont posé pas mal de problèmes à certains candidats avec de nombreuses erreurs (il s'agissait pourtant de calculer un déterminant 3×3, puis de résoudre des systèmes linéaires de la même taille), le plus souvent faute de néthodologie rigoureuse pour mener ces calculs à bien. Un recul sur les résultats obtenus permettrait de détecter certaines erreurs, ainsi, il est tout à fait anormal de ne trouver que le vecteur nul comme vecteur propre, et de mettre une ligne de 0 dans une matrice de passage pourtant inversible. Certains affirment même que la matrice A^2 n'est pas diagonalisable à la première question, puis montrent qu'elle l'est à la dernière.

Partie II

Cette deuxième partie donnait un contre-exemple à la réciproque de : « A diagonalisable $\Longrightarrow A^2$ diagonalisable » : une rotation d'un quart de tour dans l'espace.

Bien que traitant d'un exemple numérique concret, cette partie a posé d'énorme difficultés à la majorité des candidats, mettant en évidence que ceux-ci se contentent d'appliquer des recettes sans vraiment comprendre ce qu'ils sont en train de faire.

Ainsi, beaucoup connaissent la forme canonique de la matrice d'une rotation dans l'espace et l'appliquent telle quelle sans vérifier que l'axe de rotation est le bon (ce qui n'était pas le cas). Mentionnons ici que certains candidats ne connaissent pas la valeur de $\cos \dfrac{\pi}{2}$!

Ensuite, beaucoup perdent un temps infini à calculer des sous-espaces propres pour montrer qu'une matrice déjà diagonale est diagonalisable.

Dans le même genre d'idées, il était demandé de trouver deux vecteurs orthogonaux à un vecteur donné. Beaucoup de candidats se lancent à corps perdu dans des calculs pour déterminer ces vecteurs, alors qu'il est assez clair qu'il n'y a pas unicité de la solution et donc qu'il faudra choisir une solution particulière à un moment. Même normer un vecteur est difficile pour certains candidats.

Les formules de changement de base pour les matrices ne sont majoritairement pas connues (alors qu'elles le sont pour la diagonalisation !). Beaucoup se contentent de multiplier la matrice représentant la rotation dans une certaine base par la matrice de passage pour obtenir la matice dans l'autre base. Et bien peu de candidats ont le réflexe de dire qu'une matrice de passage d'une b.o.n.d. à une autre b.o.n.d. est orthogonale et donc que l'on connait son inverse.

Enfin, une très petite minorité de candidats sont capables de dire qu'une matrice semblable à une matrice diagonalisable est également diagonalisable.

Globalement, un peu de recul sur les résultats permettraient d'éviter certaines erreurs et de perdre beaucoup de temps dans des calculs inutiles, mais la grande majorité des candidats en manque cruellement.

Partie III

Cette dernière partie démontrait l'implication « A^2 diagonalisable $\Longrightarrow$ A diagonalisable », dans le cas où les valeurs propres de A^2 sont toutes strictement positives. La preuve reposait sur une démonstration du lemme des noyaux dans le cas de deux valeurs propres distinctes.

Bien que plus théorique, cette partie guidait énormément les candidats et a donc été mieux réussie que la précédente. On regrettera cependant un manque de précision dans les raisonnements mathématiques et la rédaction. Ainsi, il est très désagréable de lire des affirmations du style « Les vecteurs propres de f forment une base de E » (voire « Les sous-espaces propres de E forment une base de E ») même si l'utilisation qui en est faite ensuite est correcte.

Globalement, on peut affirmer que beaucoup de candidats ne sont pas conscients des objets manipulés et il est tout à fait anormal de voir écrit par exemple « $f \circ g(x) = f(x) \circ g(x)$ », ou d'autres horreurs du même accabit.

Exercice de probabilités

Cet exercice consistait à lancer, indépendemment les unes des autres et uniformément, n boules dans N cases et à étudier le nombre moyen de cases non vides à l'issue de l'expérience.

Cet exercice a été très mal traité, les probabilités semblant poser des problèmes insurmontables à bon nombre de candidats.

Ainsi, les premières questions portaient sur du dénombrement pour calculer quelques probabilités (ces questions n'étaient pas bloquantes pour la suite de l'exercice). Visiblement, pour beaucoup de candidats, la stratégie consiste à tirer au hasard (uniformément ?) une loi parmi les lois usuelles et d'affirmer que la variable étudiée suit cette loi. Pour beaucoup d'autres, la réponse tient en une ligne qui comporte une formule (le plus souvent très fausse) sans aucune justification.

La notion de « système complet d'événements » est utilisée (à bon escient) par beaucoup de candidats, mais comprennent-ils vraiment ce que cela signifie ?

La partie sur la manipulation de fonctions génératrices a été sûrement un soulagement pour beaucoup, même si ce sont les indices de sommation qui sont maintenant choisis au hasard. Les calculs sur les séries entières sont plus ou moins maîtrisés et beaucoup de candidats savent calculer l'expression d'une suite arithmético-géométrique, ce qui leur a permis d'obtenir quelques points à cet exercice.

La dernière question revenait à des considérations plus probabilistes et a donc subi le même sort que le début de l'exercice, alors qu'il s'agissait essentiellement de reconnaitre une loi binomiale comme nombre de succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, ce qui devrait normalement relever du réflexe.