Rapport sur l'oral de Mathématiques I

Remarques générales

L'oral de mathématiques I consiste en une interrogation au tableau sans préparation, d'une durée de 30 minutes. L'exercice proposé au candidat porte sur l'ensemble du programme des deux années de préparation (algèbre, analyse, probabilités et géométrie), et est de difficulté graduelle, les premières questions étant toujours très abordables. Les exercices sont répartis de façon équilibrée entre algèbre, analyse, probabilités, géométrie. Lorsqu'un deuxième exercice est proposé, il porte sur une autre partie du programme.

Le but de cet oral est de juger et d'évaluer :

- les connaissances ;
- le savoir-faire technique et les capacités mathématiques ;
- l'imagination et l'adaptabilité dans une situation un peu nouvelle des candidats.

Afin de juger de la performance de ceux-ci, l'examinateur prend en compte les éléments suivants (liste non exhaustive) :

- la compréhension du problème posé ;
- les initiatives prises (cerner les difficultés, les nommer, donner des directions pour les surmonter) ;
- la précision du langage et la connaissance précise du cours, la capacité d'envisager différentes méthodes et de réfléchir à leurs utilisations ;
- la justification précise de ce qui est fait ;
- la maîtrise du raisonnement mathématique ;
- l'organisation et la présentation du tableau, la qualité de l'expression orale ;.

Certains exercices sont longs, le jury n'attend pas nécessairement des candidats qu'ils finissent ceux-ci ; un candidat ayant très bien traité une proportion raisonnable d'un exercice long, peut ainsi avoir une note très satisfaisante.

En fin de planche d'oral, cinq minutes sont réservées à des questions de cours. Parmi les questions posées cette année - entre autres, et toujours très, très classiquement : l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la définition d'un produit scalaire, la formule de Taylor-Young (et son utilité), la formule de Taylor avec reste intégral, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction numérique de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, le théorème des accroissements finis, la caractérisation d'un endomorphisme diagonalisable à l'aide des dimensions des sous-espaces propres, définition et propriété de la trace, trace d'un projecteur, formules de Frenet (et utilité), suites adjacentes, définition et caractéristiques des isométries, caractérisation des projecteurs, caractérisation des symétries, matrices orthogonales, développements en série entière classiques, continuité/dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre, définition et interprétation des lois de probabilité usuelles, espérance et variance, formule des probabilités totales, le théorème de transfert, énoncer la loi faible des grands nombres, donner les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, ...

Le jury souhaite insister sur les points suivants :

⇝ Globalement, cette année, à l'oral, le niveau des candidats a semblé dégradé. La raison en est peut-être la méconnaissance, ou la connaissance insuffisante, ou superficielle, du cours. Le jury l'a constaté et en cours de planche, en faisant l'exercice, et en posant la question de cours en fin de planche. Fait nouveau, certains candidats font maintenant l'impasse sur des pans entiers du programme : probabilités, ou géométrie en général. Ce ne sont pas toujours des candidats faibles : un exercice assez correctement bien fait peut être suivi d'un aveu d'ignorance sur tel ou tel autre sujet.

Même si le candidat croit savoir le cours, on constate souvent que cette connaissance se limite à celle d'une formule, d'une relation, d'une inégalité ... mais que les hypothèses de validité sont ignorées. On va parfois plus loin en ce sens que le cadre même n'est pas connu. Plutôt qu'une liste d'erreurs, voici deux exemples :

⇝ **Exemple 1 : Inégalité de Bessel (un alinéa du programme).**

On obtient les réponses suivantes :

$$\|p(x)\| \leq x$$

ou :

$$\sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2 \leq \|x\|^2$$

Quant à dire que l'espace est euclidien, ou préhilbertien, ce qu'est p, ce que sont e_1, ..., e_n, c'est une autre affaire.

⇝ **Exemple 2 : Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev .**

Là encore, on obtient souvent une inégalité, mais il est beaucoup plus difficile de savoir ce qu'est X, les conditions satisfaites par cette variable aléatoire, ainsi que les conditions sur les paramètres a, ...

⇝ De nombreux candidats se montrent peu dynamiques, lents, on s'endort. Certains sont inaudibles. Attitudes parfois actives : on attend des propositions de méthodes, ou des idées dans des cas particuliers au moins, en tous cas pas une attitude du candidat qui se repose sur les idées du jury en attendant des perches systématiquement. L'introduction de notations spontanées donne souvent un indice fort de compréhension de la nature des objets mathématiques manipulés, notamment en probabilités (événement, nombre, VA) .

⇝ La signature de la carte d'identité est souvent obsolète.

⇝ Trop de candidats sont ≪ en attente de validation avant de commencer un calcul ≫ : ce n'est pas une colle.

⇝ C'est une épreuve orale, il ne faut donc pas tout écrire au tableau comme sur une copie. Mais cela ne dispense pas non plus d'un minimum de rigueur et de rédaction (usage de $\Leftrightarrow$ par exemple).

⇝ Beaucoup de candidats parlent de ≪ sin ≫, ≪ tan ≫, ≪ Vect ≫, ≪ id ≫, ≪ ker ≫, ≪ det ≫ . Le jury rappelle qu'à l'oral, il est préférable de donner les noms complets.

⇝ Des calculs simples posent souvent de grosses difficultés : factoriser une somme, utiliser des inégalités, bien mettre les parenthèses ...

⇝ Les calculs sont globalement effectués trop lentement, vraiment, et la stratégie maligne qui serait de connaître des méthodes évitant les calculs n'est que peu employée (très peu et par des candidats qui pourraient en fait sont ceux qui se sortent des calculs, quel paradoxe ! !).

⇝ Les erreurs de raisonnement et de logique sont légion. On ne compte plus les ≪ il faut ≫ qui devraient être des ≪ il suffit ≫.

⇝ Argumentation : les théorèmes sont censés être connus avec leurs hypothèses. Les définitions aussi.

⇝ On déplore souvent un manque de dextérité dès qu'il faut mener un calcul. Certaines questions, réputées simples et rapides par le jury occupent parfois une grande partie de l'oral (calcul de dérivée, de valeur propre).

- $\rightsquigarrow$ On constate que les noms des propriétés ne sont pas connus de certains candidats (théorème spectral, formule des probabilités composées, théorème de transfert. ...)

Remarques particulières

1 Analyse

- $\rightsquigarrow$ L'inégalité triangulaire souvent est mal utilisée.

- $\rightsquigarrow$ Beaucoup de candidats rencontrent de grosses difficultés pour montrer qu'une intégrale ou une série converge.

- $\rightsquigarrow$ Le jury rappelle que tous les calculs de limite avecln ou exp ne sont pas des croissances comparées.

- $\rightsquigarrow$ Les calculs de dérivées posent réellement problème à de trop nombreux candidats. Ils sont lents et souvent faux de prime abord.

- $\rightsquigarrow$ Le jury rappelle que si $f(x_0) = k \in \mathbb{R}$, on n'a pas automatiquement $f'(x_0) = 0$.

- $\rightsquigarrow$ Fonctions usuelles : le jury a noté des confusions importantes sur les définitions/propriétés des fonctions usuelles. Par exemple, le jury a vu des candidats écrire $\ln e = 0$, $\ln x \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ si x est assez grand et plus généralement, tenter d'utiliser les croissances comparées dans des situations où elles ne s'appliquent absolument pas.

- $\rightsquigarrow$ Les candidats ont peu de réflexes face aux suites récurrentes non linéaires d'ordre 1.

- $\rightsquigarrow$ Le calcul de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique n'est pas toujours bien maîtrisé : oubli du premier terme, confusion entre $x \neq 1$ et $|x| < 1$. En particulier, peu de candidats appliquent la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ sans prendre la précaution de vérifier que la raison q est différente de 1. Certains candidats font des mélanges avec les séries géométriques et pensent en revanche que la formule précédente n'est valable que si $q \in]-1,1[$.

- $\rightsquigarrow$ Les produits de Cauchy de deux séries (numériques ou entières) sont souvent écrits « à l'envers » : les candidats écrivent d'abord la relation entre les trois séries, avant de définir c_n, les hypothèses étant souvent manquantes ou inexactes.

2 Algèbre

- ⇝ Les énoncés des théorèmes sont souvent connus de façon trop approximative (formule du produit matriciel souvent mal connue, oubli fréquent de l'hypothèse ≪ symétrique réelle ≫, dans l'application du théorème spectral.

- ⇝ De nombreux candidats ne connaissent pas la définition du rang d'une matrice.

- ⇝ La formule $tr\,(A\,B) = tr\,(B\,A)$ est parfois non sue, et la preuve souvent mal faite.

- ⇝ Trop peu de candidats sont capables d'analyser un endomorphisme sans calcul à partir d'une matrice. Cela est vrai en particulier pour la recherche d'une base du noyau ou de l'image. Concrètement, si $C_1 = C_2$, peu de candidats savent conclure que $e_1 - e_2 \in \ker f$.

- ⇝ L'interprétation des matrices (lecture des informations) est problématique dans de nombreux cas. On dirait que les candidats se sont fait une raison : systématique toujours (mais sans assumer sur les calculs derrière). Ces questions en particulier posent problème : la matrice nulle est-elle diagonalisable ? Base de vecteurs propres ? Idem pour les matrices diagonales.

- ⇝ Matrices diagonalisables : les candidats se précipitent sur polynôme caractéristique, valeurs et sous-espaces propres, y compris parfois sur des matrices diagonales (cas de Hessiennes rencontrées dans certains sujets) ou triangulaires, alors que souvent, une observation attentive de la matrice permet de répondre à la question sans (presque aucun) calcul.

- ⇝ Les calculs de polynôme caractéristique (même simples) posent problème en temps, et ne sont pas souvent menés de façon autonome et correcte. Il serait bon de rappeler qu'il est attendu de chercher soi-même ses erreurs. Les méthodes alternatives pour alléger les calculs sont les bienvenues !

- ⇝ Les notions d'inversibilité et de diagonalisabilité de matrices sont parfois confondues.

- ⇝ Le jury a noté des confusions dans les critères de diafgonalisabilité (par exemple, il n'est pas rare d'entendre : ≪ pour qu'une matrice soit diagonalisable, il faut que son polynôme soit scindé à racines simples ≫).

- ⇝ Une matrice symétrique réelle est certes diagonalisable, mais pas nécessairement inversible.

- ⇝ Peu de candidats pensent à utiliser les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.

- $\rightsquigarrow$ Les manipulations sur les nombres complexes réservent souvent des surprises (produit, conjugaison, etc.).

- $\rightsquigarrow$ Les racines $n^{ièmes}$ de l'unité sont mal connues.

3 Géométrie

- $\rightsquigarrow$ Si l'étude des courbes paramétrées est souvent bien réalisée, certains candidats n'utilisent pas du tout l'étude préliminaire (tableau de variation, tangentes, points de rebroussement, etc.) avant de tracer une courbe paramétrée.

- $\rightsquigarrow$ Le produit vectoriel n'existe pas dans le plan. Sur les graphes, il faut mettre les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ou, au minimum, graduer les axes.

- $\rightsquigarrow$ L'intersection de deux plans pose problème à de nombreux candidats.

- $\rightsquigarrow$ Peu de candidats semblent percevoir l'intérêt de la vision géométrique des nombres complexes et s'empressent d'écrire $z = a + ib$ alors qu'une raisonnement mettant en jeu le module de z et un argument fournit souvent le résultat de façon plus rapide et plus élégante.

4 Probabilités

- $\rightsquigarrow$ Peu de candidats citent la convergence absolue pour dire qu'une variable aléatoire est d'espérance finie.

- $\rightsquigarrow$ Très peu de candidats connaissent la valeur de $\binom{n}{2}$ et doivent la retrouver par le calcul.

- $\rightsquigarrow$ De nombreux candidats font les confusions classiques suivantes : événement / variable aléatoire / probabilité ou indépendance / incompatibilité.

- $\rightsquigarrow$ Beaucoup de candidats souhaitent introduire des variables aléatoires quand cela n'est pas nécessaire, par exemple, lors de l'étude d'une succession de pile ou face.

- $\rightsquigarrow$ L'utilisation des séries génératrice pose problème à de nombreux candidats.

- $\rightsquigarrow$ Certains candidats ont tendance à vouloir utiliser la formule des probabilités totales, même lorsque les événements ne sont pas incompatibles.

$\rightsquigarrow$ Les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev sont rarement écrites proprement (erreurs dans les formules, oublis d'hypothèses).