Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

Remarques générales

L'épreuve était composée d'un problème d'algèbre linéaire, lui-même découpé en trois parties largement indépendantes, et d'un exercice de probabilités. Chaque partie du problème ainsi que l'exercice de probabilités avaient un poids à peu près équivalent dans la notation.

D'une façon générale, nous regrettons une baisse de la qualité de la présentation des copies, à plusieurs niveaux :

i. **Présentation :** certaines copies ressemblent plus à un brouillon qu'à une copie de concours.

ii. **Rédaction :** on ne sait pas toujours ce que veut faire le candidat ni à quoi servent les calculs présentés. Annoncer ce que l'on cherche à faire guide le correcteur.

iii. **Rigueur mathématique :** les équivalents sont utilisés à très mauvais escient, en revanche les quantificateurs sont inexistants et on ne sait pas toujours si on travaille à x fixé (vérifiant certaine propriété) ou pour tout x...

Tous ces points entrent en ligne de compte dans la notation.

L'épreuve était semble-t-il de difficulté tout à fait raisonnable, certains candidats réussissant à traiter la quasi-totalité des questions. Le niveau moyen reste assez faible.

Il est également à noter que certaines questions étaient des démonstrations explicitement au programme tels que ≪ la loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre ≫, ou encore ≪ une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe ≫, et il est anormal que la grande majorité des candidats ne puisse pas répondre clairement à ce genre de questions.

Remarques particulières

Problème d'algèbre linéaire

Ce problème étudiait des questions autour de la diagonalisation et des puissances itérées de certaines matrices.

Partie I

Cette première partie consistait à diagonaliser une matrice symétrique réelle de taille 3×3, puis à calculer sa $n^{ième}$ puissance itérée via une relation de récurrence linéaire.

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres associés d'une matrice ne pose pas de problème pour la plupart des candidats. En revanche, les conditions de diagonalisation restent parfois floues : la condition polynôme scindé ne suffit pas, encore moins déterminant non nul !

Le terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre deux à coefficients constants est étonnament ignoré de beaucoup de candidats (avec peut-être des confusions avec les équations différentielles d'ordre 2, une exponentielle $e^{\lambda n}$ apparaissant souvent à la place du λ^n attendu).

Précisons enfin qu'une relation obtenue pour trois termes d'une suite n'entraîne pas qu'elle est valable pour tout n et que, même si l'énoncé s'intitule « en déduire ... », une démonstration en bonne et due forme est toujours attendue.

Partie II

La seconde partie étudiait les puissances itérées d'une matrice dont les trois premières puissances s'exprimaient simplement en fonction de deux matrices données. Cette partie a été plutôt bien réussie, excepté la seconde question qui a mis en évidence une certaine malhonnêteté (?) de beaucoup de candidats qui ont écrit des égalités fausses pour obtenir le résultat attendu (essentiellement, $(\lambda U + \mu V)(\lambda^p U + \mu^p V) = (\lambda^{p+1} U + \mu^{p+1} V)$) ou qui affirment que $UV = 0$ (ce qui était en l'occurrence vrai) sans aucune justification.

Partie III

Cette dernière partie étudiait la diagonalisibilité d'une matrice de la forme

$$A = aI + U\,{}^tV$$

où U et V sont des vecteurs colonnes fixés. Le début de cette partie a été en moyenne bien traitée, le produit matriciel étant en général maitrisé. Il faut cependant éviter d'écrire des égalités de la forme

$$A = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} v_{kj},$$

une matrice ne pouvant pas être égale à un nombre !

Même si l'on a encore vu des vecteurs élevés au carré, cela est resté rare, tout comme des égalités du type $U\,{}^tV = {}^tV\ U$. Les dimensions des matrices obtenues à l'issue de ce type de produit étaient en général les bonnes.

Précisons que nous aurions aimé voir plus souvent que les matrices commutaient pour pouvoir appliquer la formule du binôme pour développer le carré d'une somme, même si l'une de ces matrices était l'identité.

La fin de cette partie a été plus difficile, la condition de diagonalisibilité avec la somme des sous-espaces propres étant largement ignorée. A ce sujet, il est souvent dit que le sous-espace vectoriel forme une base d'on ne sait quoi, confusion très dérangeante même s'il y a effectivement des liens entre somme directe d'espaces vectoriels et réunion de bases. Encore une fois, il ne faut pas confondre les différentes notions et bien avoir conscience de la nature des objets manipulés.

Exercice de probabilités

Cet exercice étudiait diverses propriétés de la loi géométrique utilisant notamment la fonction de répartition et la fonction génératrice de cette loi.

Contrairement à l'année précédente, cet exercice a posé beaucoup de difficultés aux candidats, la principale étant le calcul de la somme de termes d'une suite géométrique.

Il y a par ailleurs beaucoup de confusion entre probabilités, événements, variables aléatoires, et il est toujours désagréable de voir des intersections de probabilités ou de variables.

En cumulant ainsi mauvaise compréhension des outils, et calculs laborieux voire complètement faux, les résultats de cette partie ont été très mauvais. Cet exercice s'est révélé très discriminant entre bons candidats et candidats plus faibles.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques B

Remarques générales

Le sujet de cette année était constitué d'un problème comprenant quelques questions de cours, un préliminaire comportant des questions utiles pour la suite puis du problème en lui même composé de cinq parties : une d'algèbre bilinéaire, trois parties liées de géométrie plane puis une dernière partie de géométrie dans l'espace.

Globalement, ce sujet plus orienté sur la géométrie plane a été mieux réussi que le sujet de géométrie dans l'espace de l'an dernier, mais les résultats restent très contrastés. Si certains candidats ne traitent avec succès que quelques rares questions, on trouve également quelques très bons candidats ayant traité avec succès la totalité du sujet. Les correcteurs constatent également une certaine hétérogénéité entre les différentes parties, certains candidats étant plus à l'aise sur l'algèbre (partie I) et d'autres sur la géométrie plane (partie II).

Les correcteurs s'étonnent également que de nombreux candidats ayant traité (avec plus ou moins de réussite) l'étude de la courbe n'essayent pas de la tracer. Il leur est signalé que dans un sujet dit de géométrie, le nombre de points accordé aux tracés des courbes est loin d'être négligeable.

La présentation des copies ne s'est pas améliorée cette année. Si heureusement, on compte peu de copies qui ressemblent à des torchons, par contre, moins d'un candidat sur deux $(47,7\%)$ $\boxed{\text{encadre}}$ les résultats de ses démonstrations, comme cela est pourtant demandé par l'énoncé... Pour cela, l'usage d'une règle est indispensable et il est conseillé d'utiliser une couleur différente de la couleur d'écriture..

Par ailleurs, il est rappelé (Cf. notice du concours) que ≪ les épreuves doivent être écrites à l'encre bleue et/ou noire, exception faite pour des schémas ou graphiques nécessitant une palette plus large de couleurs d'encre alors autorisées ≫ : 1 candidat sur 11 ne respecte pas cette consigne.... L'usage de stylos dont l'encre est susceptible de traverser le papier est également à éviter. Enfin, la couleur de l'encre utilisée doit être suffisamment foncée pour ne pas se confondre avec le quadrillage du papier.
Encore plus que les années précédentes, l'orthographe de très nombreuses copies laisse à désirer. Il serait souhaitable que des mots d'usage courant en mathématiques et dont la plupart figure dans l'énoncé soient correctement orthographiés et tout particulièrement : mathématiques, tangent(e), asymptote, cartésien(ne), colonne, dimension, terme, bilinéaire, lancer...
Rappelons que les noms propres s'écrivent avec une majuscule. De plus les correcteurs ont trouvé un nombre important de copies dans lesquelles les noms de (Jakob ou Jacques)

Bernoulli, (Jorgen) Gram et (Erhard) Schmidt ont été mal orthographiés.
On constate toujours que des règles élémentaires de la grammaire sont ignorées : accord genre et/ou nombre mais aussi conjugaison. Dans certaines copies, la situation est telle que les correcteurs ne parviennent pas à comprendre ce que les candidats essayent de dire et ceci est particulièrement vrai dans l'exemple demandé dans la question de cours 2.c.

On constate également de nombreuses confusion de vocabulaire et/ou de notions : dimension, cardinal et rang, tangente et asymptote, gradient et dérivée, droite, vecteur directeur et pente, résoudre et calculer, vecteur propre et sous-espace propre...
De plus, un peu plus d'attention vis à vis de la nature des objets qu'ils manipulent, devrait permettre aux candidats d'éviter de : dériver une courbe ou calculer sa valeur en un point, calculer le produit vectoriel de deux vecteurs du plan, confondre $=$, $\Leftrightarrow$ et $\sim$, $\subset$ et $\in$...

Les candidats sont également invités à respecter les notations de l'énoncé et à définir les notations qu'ils utilisent et qui n'y figurent pas.

Du côté de la rédaction, on constate que les quantificateurs sont régulièrement oubliés ou malmenés, ce qui conduit régulièrement à des confusions ou à des contresens. Il en est de même avec le choix de certaines notations : P', X, Y ou t pour désigner un polynôme, X pour désigner un scalaire quand on manipule des polynômes ou x, u pour désigner des espaces vectoriels ne sont pas des notations adaptées.

Enfin, nous avons noté de nombreuses tentatives d'arnaque du correcteur : les candidats commencent un raisonnement puis passent directement à la conclusion en faisant l'impasse sur l'argument décisif (question I 1 ou préliminaire 3), ils prétendent avoir vérifié que $\varphi(P, Q) = 0$ (question I 2d) alors que leurs sous-espaces propres sont faux ou encore soutiennent, fausse résolution de système à l'appui (question V 1), que les points D_1 et D_2 appartiennent à Γ_4... Ces pratiques laissent un sentiment très désagréable aux correcteurs et sont pénalisées.
D'autres remarques concernant la rédaction figurent aussi dans le détail question par question.

Face aux très nombreuses erreurs de calcul que l'on trouve dans les copies, les correcteurs souhaitent donner les conseils suivants aux candidats. Tout d'abord, les parenthèses ne sont pas optionnelles : $x + 2 \times y$ et $(x + 2) \times y$ ne donnent pas le même résultat. Ensuite, il est préférable d'écrire une ligne ou deux de plus pour avoir la bonne réponse plutôt que vouloir faire en une seule étape : remplacer, développer, réduire et ordonner... et de se tromper. Enfin, les candidats ont tout intérêt à simplifier leurs calculs comme $\dfrac{10}{8}$ ou $6x = 6y$. Signalons que le concepteur n'envisage pas de demander aux candidats de déterminer les sous-espaces propres d'une matrice pour des valeurs propres égales à $\dfrac{8 + \sqrt{66}}{2}$ ou de placer dans un repère des points dont les coordonnées sont des polynômes en $\dfrac{18 + \sqrt{234}}{24}$, il est donc conseillé aux candidats de ne pas insister avec ces valeurs et de reprendre leurs calculs. Par ailleurs, la factorisation de $6 - 18t + 12t^2$ par 6 évitait des calculs de discriminants trop compliqués.

Avant de passer au détail question par question, nous rappellons aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre...

Remarques particulières

Questions de cours.

Nombre de bonnes réponses	7	6	5	4	3	2	1	0
Pourcentage de candidats	10	$20,5$	$20,5$	19	$14,5$	$9,5$	4	2

<u>Plus précisement</u> :

La plupart des candidats ont reconnu la formule du binôme de Newton et connaissent la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ malgré quelques confusions avec le degré.

En ce qui concerne les variables aléatoires. Le loi binomiale est très souvent reconnue, il lui manque parfois un paramètre ; son espérance est un peu mieux connue que sa variance.

Nous attirons l'attention des candidats sur le fait qu'il existe des variables aléatoires qui ne représentent pas ≪ une répétition de n expériences de Bernoulli avec une probabilité de succès égale à t ≫. De nombreux candidats ont donné l'espérance et la variance avec p et q sans que l'on sache de quoi il s'agit. En ce qui concerne l'exemple demandé, on trouve des exemples classiques (lancers) ou plus originaux où il manque réguliément un argument d'indépendance mais aussi de nombreux ≪ exemples ≫ où le correcteur a envie d'écrire : ≪ $X_n = ???$ ≫ ou ≪ blabla ≫. Cet exemple permet aussi de constater de nombreuses confusions entre variables aléatoires, probabilités et événements.

Certains candidats confondent espaces vectoriels orthogonaux et orthogonal d'un espace vectoriel. Nombreux sont ceux qui veulent calculer le produit scalaire de deux espaces vectoriels. Certaines définitions (ou caractérisations) ne sont valables que dans le cas de la dimension finie (ou plus précisement que dans le cas où les espaces vectoriels considérés possèdent une base).

Enfin, on trouve de nombreuses définitions d'une surface de révolution pour lesquelles le tore n'en est pas une, le cylindre elliptique en est toujours une et le cylindre de révolution possède une infinité d'axes de révolution...

Préliminaires.

1. Le terme ≪ développer ≫ semble signifier ≪ additionner ≫ ou ≪ factoriser ≫ pour de nombreux candidats. Entre 1 et 2 % de candidats ne savent pas calculer le coefficient binomial.

2. C'est la méthode ≪ famille libre + bon nombre déléments ≫ qui a le plus de succès bien que le déterminant soit le plus efficace. Signalons que cette deuxième méthode ne nécessite pas de vérifier que la famille possède le bon nombre d'éléments. Rappelons qu'une famille de vecteurs possède un cardinal mais pas de dimension. On constate également des confusion entre famille et sous-espace vectoriel engendré par la famille.

3. La famille $(\mathcal{B}_{k,n}(X))_{0\leqslant k\leqslant n}$ n'est pas, contrairement à ce qu'ont affirmé de nombreux candidats (y compris dans la question précédente), échelonnée en degrés. Les tentatives de démonstration par récurrence ont presque toujours échoué soit parce que la propriété a été mal définie, soit parce que les candidas n'ont pas vu le lien entre les polynômes d'ordre n et ceux d'ordre $n+1$. Signalons qu'un système triangulaire n'est pas toujours inversible.

Partie I : Un produit scalaire.

1. (a) La définition n'est pas toujours connue. La plupart des candidats oublie de vérifier que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (et non dans $\mathbb{R}_2[X]$). Il est conseillé de démontrer proprement la bilinéarité (et non la linéarité) plutôt que d'utiliser des formules du type ≪ il est évident que ... par linéarité (de la somme et du produit) des polynômes ≫. Rares sont les candidats qui justifient que si φ linéaire à droite (ou à gauche) et symétrique alors φ est bilinéaire ; presque tous se contentent de l'affirmer (savent-il le justifier ?...). La propriété ≪ $\varphi(P,P)=0 \Leftrightarrow P=0$ ≫ a fait l'objet de nombreuses tentatives d'arnaque.

   (b) Le procédé de Gram-Schmidt n'a pas eu un succès extraordinaire. Parmi ceux qui l'ont tentée, il y a ceux qui se contentent de normer (et pas normaliser) les vecteurs, ceux qui oublient de le faire, ceux qui utilisent un autre produit scalaire pour normer les vecteurs, ceux qui ne l'appliquent pas à la bonne base. Si on rajoute ceux qui font des erreurs de calculs, il n'est pas resté beaucoup de bonnes réponses.

2. (a) Presque tous les candidats ont reconnu une matrice symétrique, malheureusement la moitié oublie de dire qu'elle est à coefficients réels. Signalons que le

théorème spectral dit qu'il existe une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}MQ$ soit diagonale et en aucun cas, contrairement à ce que semblent penser de nombreux candidats que toute matrice Q vérifiant $Q^{-1}MQ$ diagonale, est orthogonale (et pas orthonormée).

(b) Nombreux sont les candidats qui ne font pas cette question ou qui ne vont pas au delà du calcul du polynôme caractéristique. A ce sujet, signalons que deux matrices équivalentes (en ligne ou en colonne) n'ont pas toujours le même déterminant.

Il y a eu malheureusement peu de matrices orthogonales, la base choisie pour le sous-espace propre associé à la valeur propre double n'étant pas orthogonale. Pourtant de très nombreux candidats affirment que la matrice Q qu'ils proposent, est orthogonale : vérifier que c'est bien le cas, leur aurait pris bien peu de temps et permit de détecter leur erreur (et donc de gagner des points). On trouve des matrices supposées inversibles ayant une colonne nulle ou deux colonnes identiques.

Signalons une pratique fréquente dans la résolution des systèmes : les candidats ignorent ou suppriment l'une des équations. Cette pratique est certes justifiable (mais jamais justifiée) mais elle interdit aux candidats, hélas nombreux, qui se sont trompés dans le calcul des valeurs propres de se rendre compte de leur erreur. Il est donc conseillé aux candidats de résoudre soigneusement les systèmes par équivalence en exploitant toutes les équations.

Parmi les autres points de rédaction, signalons : les multiples notations pour les sous-espaces propres qui ne sont pas définies, les systèmes dont on ne sait pas d'où ils viennent, des vecteurs colonnes qui appartiennent à un sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs ligne, des produits qui n'existent pas...

(c) M et f ont certes les mêmes valeurs propres mais pas les mêmes sous-espaces propres, les vecteurs contenus dans chacun d'eux n'ayant pas la même nature. Il convient d'ailleurs d'utiliser des notations différentes. Le lien qui existe entre les sous-espaces propres de M et ceux de f ne semble pas connu et quand il l'est, les polynômes ont souvent été exprimés dans la base $(1, X, X^2)$.

(d) Question peu et souvent mal traitée, le produit scalaire φ n'étant pas utilisé.

3. Question peu traitée. Les candidats l'ont souvent comprise à l'envers. On y trouve néanmoins de très bonnes réponses.

Partie II : Une première courbe de Bézier dans le plan.

1. (a) Il est illusoire de vouloir trouver la représentation demandée sans utiliser la définition donnée en début de sujet. Assez souvent, des candidats ont décidé que cette courbe devait passer par les 4 points de contrôle. Trop nombreux sont les candidats qui ne disent pas où se trouve le paramètre ou qui le placent dans $\mathbb{R}$.

   (b) Lorsque la question précédente a été bien traitée, la réponse est correcte mais la formulation laisse souvent à désirer. Que des candidats ne trouvent rien d'autre à dire que « ce sont deux courbes paramétrées » devrait les conduire à se poser des questions sur leurs calculs dans la question 1.a.
   Le terme de restriction s'applique aux fonctions, pour leurs graphes, on parle d'inclusion.

2. (a) Les tableaux de variations doivent être justifiés (parfois, nous n'avons même pas le calcul des dérivées !) : la factorisation ou la recherche des racines des dérivées étaient ici attendues. Par ailleurs les expressions $6-6t-12t^2$ et $(t+1)\left(t-\frac{1}{2}\right)$ ont les mêmes racines mais pas le même signe et ne sont certainement pas égales.

   (b) Quelques inversions entre horizontale et verticale. Le point stationnaire a de temps en temps deux tangentes.

   (c) Il n'est pas toujours clair que la tangente passe bien par le point A_0. On trouve aussi régulièrement une équation de la normale ainsi que des confusions avec les courbes d'équation $y=f(x)$.

   (d) On aimerait bien savoir pourquoi $p=2$ et $q=3$. Les candidats oublient souvent la tangente, il arrive qu'elle n'existe pas. On rappelle qu'une tangente est une droite et non un vecteur (directeur) ou une pente. Les illustrations graphiques ont été appréciées.

   (e) Les calculs sont souvent ceux attendus, bien qu'il manque parfois les limites de x_2 et y_2 en $+\infty$. La conclusion réguliѐment fausse et l'illustration graphique inexistante.

3. On recherche trop souvent les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ qui, on le rappelle, sont de longueur une unité. Certains candidats ne graduent même pas les axes. L'unité de 6cm était certes uniquement conseillée et non imposée mais le choix d'une unité de 1cm, 5mm et même 2mm était déraisonnable.
   Cette question n'est pas suffisamment traitée y compris par les candidats ayant fait une étude convenable de la courbe. Il arrive que certaines courbes ne soient pas tangentes à leur tangente... Certains candidats semblent avoir des soucis pour placer des points dont une coordonnée est $\dfrac{7}{4}$ ou $\dfrac{5}{9}$.

Partie III : Un détour par le cas général

1. Les candidats ont intérêt à vérifier que ce qu'ils trouvent dans le cas général est conforme aux cas particuliers présents dans le sujet. Rappelons que X^0 est le polynôme constant égal à 1 et par conséquent que $\mathcal{B}_{0,n}(0) = 1$.

2. Question peu traitée. Elle nécessitait d'être soigneux dans le calcul des dérivées des polynômes $B_{k,n}$ et de leur évaluation en 0.

3. Cette question a été traitée aussi souvent que la dernière de la partie I mais a été sensiblement plus réussie.

Partie IV : Une deuxième courbe de Bézier.

1. (a) Souvent du ≪ blabla ≫ avant une proposition des coordonnées de C_1 miraculeuse.

   (b) Que des candidats puissent trouver la bonne réponse sans avoir les (bonnes) coordonnées de C_1 agace les correcteurs. Signalons qu'il existe une infinité de courbes passant par deux points fixés et ayant des tangentes fixées en ces points.

   (c) De nombreux candidats ne comprennent pas l'importance de $t \in [0; 1]$ et construisent les tableaux sur $\mathbb{R}$ après avoir essayé de réduire l'intervalle d'étude et font une étude des branches infinies.

   (d) Tracé ayant eu plus de succès que celui de la partie II.

Partie V : Une surface de révolution.

1. Le résultat étant donné, tous les calculs doivent figurer sur la copie.

2. Des confusions entre gradient et dérivée donc entre tangente et normale... en sachant que dans l'espace, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné n'est pas une droite. Des confusions également entre représentation cartésienne et représentation paramétrique. Rappelons que la première nécessite deux équations.

3. La rédaction est régulièrement approximative. Nombreux sont ceux qui n'ont pas su exploiter $t \in [0,1]$. Les illustrations graphiques ont été appréciées.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

Globalement, les candidats ont réussi à répondre à un nombre important de questions. La notion d'intégrale à paramètre semble bien comprise.

Le sujet faisait appel à des connaissances de première année (théorème des accroissements finis) : celles-ci semblent oubliées d'une grande partie des candidats, ce qui est regrettable.

L'orthographe laisse toujours à désirer, avec pourtant des mots utilisés fréquemment en mathématiques (nous avons trouvé : « interval », « une intégral »...). Le nom de Rolle a été régulièrement écorché : « Rholle », « Rhôlle », etc...

Les copies sont, dans la majorité, bien présentées. Le jury a noté un effort de rédaction en ce qui concerne des points a priori délicats.

Nous souhaitons aussi faire quelques rappels de bon sens :

i. Il faut produire un raisonnement : recopier le résultat de la question n'est pas une preuve (comme nous l'avons fréquemment trouvé à la troisième question de la partie II : il ne suffit pas de recopier l'équation différentielle). Si le résultat attendu est donné dans l'énoncé, il faut prêter une attention particulière à la rédaction de la solution.

ii. Certains candidats manquent d'honnêteté intellectuelle en essayant de tromper le correcteur, effectuant un calcul manifestement faux mais en concluant avoir répondu. Par exemple, lors du calcul de $G(x+1) = (x+1)G(x)$, ou encore pour prouver que $\tilde{G}$ prolonge G.

iii. On peut rappeler l'importance de lire l'énoncé et l'enchaînement des questions : déterminer la convergence d'une série n'est pas la même chose que déterminer le développement en série entière d'une fonction.

iv. Les abréviations ne sont pas acceptables dans les copies : il faut faire l'effort d'écrire les noms des théorèmes en entier, et non, comme nous l'avons trouvé : « TAF », « TFCI », « IPP ».

Remarques particulières

Préambule

1. Une proportion non négligeable de candidats ne connaît pas le théorème des accroissements finis, ou alors, imparfaitement : il manque souvent des hypothèses essentielles, comme le caractère dérivable de la fonction considérée.
   Ou encore, dans l'égalité $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, beaucoup de candidats prennent c quelconque dans le domaine de dérivabilité de la fonction f, indépendant donc de a et b, ce qui sous-entend qu'ils n'ont aucune interprétation géométrique de ce théorème.
   Beaucoup donnent, comme réponse, la définition du nombre dérivé d'une fonction.
   Nous avons aussi trouvé des confusions avec le théorème de Rolle.
   Enfin, nous avons aussi trouvé un certain nombre de copies où les candidats semblent ne pas connaître la signification des quantificateurs, « quelque soit » est confondu avec « il existe », et vice-versa.

2. Cette question a été traitée par les candidats ayant correctement répondu à la précédente, même si, souvent, ceux qui ont bien écrit dans la question précédente que c devait être dans l'intervalle ouvert $]a,b[$ ne précisent pas toujours que c_{x,x_0} doit être dans $]x,x_0[$, et se contentent d'affirmer qu'il appartient au domaine de dérivabilité I de la fonction.
   Dans les autres copies, cette question, comme la suivante, est souvent traitée de façon très approximative, sans utiliser les résultats des questions précédentes, en prenant, par exemple : $c_{x,x_0} = x_0$.

3. La majorité des candidats ayant répondu aux deux questions précédentes a traité correctement celle-ci. Toutefois, un certain nombre de candidats n'ayant pas fait attention à l'hypothèse $x < x_0$ supputent une erreur d'énoncé.
   D'autres confondent la croissance de la fonction avec celle de sa dérivée.
   Certains candidats partent du résultat, et essayent de raisonner par équivalence.

4. Cette question a été traitée par les candidats ayant correctement répondu aux deux premières questions.
   Nous insistons sur le fait que le résultat étant donné dans la question, il est attendu dans la justification de préciser que l'inégalité change de sens car $x - x_0 < 0$.

5. Un nombre non négligeable de candidats ne semble pas connaître le résultat. Nous rappelons que l'équation d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées s'écrit sous la forme :

   $$y = a\,x + b \quad , \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

   et non :

   $$a\,x + b$$

ou encore :

$$T(x) = a\,x + b$$

Nous avons trouvé, par ailleurs, pas mal de réponses fantaisistes et aberrantes : « $f(x) = (x - x_0)\,f'(x_0) + f(x_0)$ », « $(x - x_0)\,f'(x_0) + f(x_0) = 0$ », « $f'(x_0) = 0$ », etc ...

6. La majorité des candidats a compris que la courbe représentative de la fonction était située au-dessus de la tangente au point d'abscisse x_0. Tous les candidats n'ont pas remarqué que cela restait vrai pour toutes les tangentes.
   Nous rappelons qu'il faut bien distinguer la courbe représentative d'une fonction, ou son graphe, et la fonction. De nombreux candidats ont répondu que « f était au-dessus de sa tangente en x_0 ». Là encore, des candidats donnent des réponses fantaisistes : « la courbe est une parabole », « la courbe est positive », « la courbe est croissante ».

Partie I

1. La majorité des candidats a montré, pour tout réel $x \geq 0$, l'intégrale $G(x)$ était convergente. Pour les autres, nous rappelons qu'écrire que, lorsque t tend vers l'infini, $t^x\,e^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ ne suffit pas, il faut préciser que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge.
   Nous rappelons aussi que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ diverge.

   Certains candidats pensent encore que le fait que la limite de l'intégrande soit nulle en l'infini suffit pour obtenir la convergence. D'autres donnent des équivalences entre $e^{-t}\,t^x$ et e^{-t}, ou affirment que, lorsque t tend vers l'infini, $e^{-t}\,t^x$ est négligeable devant e^{-t^2}. D'autres encore écrivent que l'intégrale est « faussement impropre en l'infini ».

2. La majorité des candidats a donné la valeur de $G(0)$. Un calcul était attendu pour cette question, en donnant une primitive de $t \mapsto e^{-t}$.

3. Tous les candidats n'ont pas réussi à déterminer la valeur de $G\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Pour ceux qui l'ont fait, le jury a apprécié la rigueur dans le maniement de l'intégration par parties. Un certain nombre de candidats ont obtenu des résultats aberrants, sans que cela ne semble les déranger : une valeur négative, ou, encore, zéro. Le jury comprend que l'on se trompe, mais apprécie les candidats qui font preuve de recul par rapports aux résultats qu'ils obtiennent, même s'ils n'arrivent pas à la solution.

4. (a) Très peu de candidats ont compris qu'il fallait distinguer les cas $0 \leq t \leq 1$ et $t > 1$. Beaucoup se contentent de recopier le résultat attendu, sans aucune justification.

(b) La majorité des candidats connaît le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Toutefois, certains donnent des réponses incomplètes : donner une hypothèse de domination par une fonction donnée, sans préciser que celle-ci est intégrable sur $[0, +\infty[$, ne suffit pas.

D'autre part, trop peu de candidats ont justifié la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} (1 + t^A)\, e^{-t} dt$.
Certains ne font pas appel à la question précédente, et utilisent une majoration par $t^A\, e^{-t}$.

(c) Pour cette question, plus délicate, les candidats pensent en général à calculer la dérivée de l'intégrande par rapport à la variable x, et procèdent ensuite par récurrence, ce qui a été apprécié par le jury. L'hypothèse de domination n'est pas souvent vérifiée correctement : les candidats oublient les valeurs absolues, ne pensent pas à vérifier l'intégrabilité en zéro. Nous rappelons aussi que, pour $0 < t \leq A$, il n'est pas possible de majorer le logarithme népérien de t par celui de A, ni par t, ni par A, comme nous l'avons trouvé fréquemment. Seuls quelques très rares candidats ont prouvé la majoration et la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 + t^A)\, e^{-t} \ln t\, dt$.
Une proportion non négligeable de candidats ne sait pas dériver l'intégrande par rapport à x. Nous avons trouvé beaucoup de réponses fausses, voire fantaisistes (avec des coefficients en « $x\,!$ »).
D'autres candidats se contentent d'affirmations où le calcul explicite des dérivées n'apparaît jamais.

(d) Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats, et s'est donc révélée classante. En particulier, conclure au caractère C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction sachant qu'elle est C^∞ sur tout intervalle de la forme $[0, A]$ nécessite un minimum de justifications, qui n'ont pas souvent été données. Un nombre important de candidats n'hésitent pas à dire qu'il suffit de faire tendre A vers l'infini, trop peu emploient le terme « quelque soit A », ou « pour tout A », pour justifier leur réponse. Un minimum de justification est nécessaire, par exemple : $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{A \in \mathbb{R}^+} [0, A]$, ce qui a été vu dans de bonnes copies.

5. La majorité des candidats a bien montré, à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout réel $x \geq 0$:
$$G(x + 1) = (x + 1)\, G(x)$$
Par contre, nous avons, dans de nombreuses copies, remarqué l'absence d'égalités entre les différentes relations requises pour arriver au résultat. Les candidats vérifient les hypothèses du théorème, écrivent leurs crochets, mais il n'y a nulle part de signe « = », ce qui est quand même problématique pour suivre le calcul.

6. La majorité des candidats a obtenu, pour tout entier naturel n : $G(n) = n\,!$, en faisant une démonstration par récurrence.

Certains candidats pensent voir une suite géométrique de raison $n+1$ ... D'autres refont le calcul précédent, sans se poser de questions, et concluent que :
« $G(n) = (n-1)\,G(n-1)$ ».

7. Peu de candidats ont compris ce qu'était un prolongement. Beaucoup se contentent de calculer les limites à droite et à gauche en zéro de $\tilde{G}$. Nous avons aussi trouvé quelques « $G(x) = \tilde{G}(x)$ » sur $]-1,0]$, alors que G n'est pas défini sur cet intervalle.

   Par contre, la majorité des candidats a réussi à montrer que le prolongement était de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$.

8. La majorité des candidats a bien montré qu'au voisinage de -1^+, $\tilde{G}(x) \sim \dfrac{1}{x+1}$.
   Nous avons quand même trouvé sur un nombre non négligeable de copies :
   « $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{G(x+1)}{x+1} = \dfrac{1}{x+1}$ », ce qui montre que les candidats n'ont pas bien compris ce qu'est une limite.
   Certains candidats n'ont pas bien mis les parenthèses dans les calculs :
   $(x+1)\,G(x) \neq x+1\,G(x)$.

   De nombreux candidats prennent l'intégrale de l'équivalent. Peu ont justifié clairement que c'était la continuité de la fonction G en zéro qui conduisait à :
   $\lim\limits_{x\to 0} G(x) = G(0)$.

9. La majorité des candidats a réussi a donner, pour tout réel $x > -1$, l'expression de $\tilde{G}''(x)$ en fonction de x, $G(x+1)$, $G'(x+1)$ et $G''(x+1)$. Par contre, l'expression sous forme intégrale n'est pas souvent donnée correctement.

   Nous rappelons que ce n'est pas au correcteur de finir et de simplifier les calculs. Certains candidats semblent ne pas voir que $-G'(x+1) - G'(x+1) = -2\,G'(x+1)$, ou encore que $\dfrac{2x+2}{x+1} = 2$ ...
   Quelques erreurs de signes se glissent dans les calculs, erreurs pourtant facilement identifiables lorsqu'on compare avec le polynôme de la question suivante.

10. La majorité des candidats a donné le signe du trinôme du second degré $X^2 - 2X + 2$ sur $\mathbb{R}$. Certains sont passés par une étude de fonctions. D'autres ont utilisé la forme canonique.
    Beaucoup de candidats oublient de conclure ...

    De trop nombreux candidats pensent qu'il suffit que le discriminant soit strictement négatif pour que le polynôme soit positif, sans penser qu'il pourrait être négatif.
    Un nombre non négligeable de candidats calcule le discriminant, donne les deux racines complexes, et fait un tableau de signes en expliquant que le trinôme est positif à l'extérieur des racines, et négatif ailleurs. D'autres donnent des intervalles de $\mathbb{R}$ dont les bornes sont des nombres complexes.

    Peu de candidats ont réussi à obtenir la stricte positivité de $\tilde{G}''(x) > 0$ pour tout réel $x > -1$. Beaucoup de candidats écrivent qu'ils « obtiennent le signe de $\tilde{G}''$ par analogie avec le polynôme du second degré », ce qui ne veut rien dire.

11. La majorité des candidats ayant correctement répondu à la dernière question du préambule a donné la réponse correcte.

    Toutefois, parmi les quelques candidats qui ont traité cette question, certains ont oublié de dire que la fonction $\tilde{G}$ vérifiait les hypothèses du préambule, en particulier, que c'était une fonction croissante.

12. La majorité des candidats trouve bien l'égalité entre $\tilde{G}(0)$ et $\tilde{G}(1)$. Par contre, peu utilisent le théorème de Rolle, beaucoup passent par le théorème des accroissements finis (ce qui est correct). Lorsque le théorème de Rolle est mentionné, les hypothèses de celui-ci ne sont pas toujours vérifiées.

    Certains candidats utilisent à tort le théorème des valeurs intermédiaires. Enfin, quelques candidats disent que « la fonction n'est pas constante, et donc admet un extremum », puis concluent, ce qui est en fait l'idée de la démonstration du théorème de Rolle : dans ce cas, autant citer le théorème.

    Enfin, sur de nombreuses copies, les candidats passent du temps à calculer $\tilde{G}(0)$ et $\tilde{G}(1)$ (à partir de leur intégrale de définition) sans tenir compte des résultats précédemment obtenus.

    De nombreux candidats ont affirmé, sans calcul, que $\tilde{G}(0) = \tilde{G}(1)$.

13. Le signe de $\tilde{G}'$ n'est pas toujours donné de façon explicite, comme demandé. De même, beaucoup de candidats donnent les valeurs des limites à droite en -1 et en l'infini, sans justification. Très peu de candidats ont justifié clairement la limite en l'infini : $\tilde{G}$ y admet une limite car elle est croissante, et la relation $\tilde{G}(n) = n\,!$, pour tout entier naturel n, permet de déterminer la valeur de cette limite. De très rares candidats justifient le résultat attendu en comparant avec la tangente en 1 et la convexité de la fonction.

    Les copies qui ont pris le soin de justifier les valeurs des limites ont été valorisées.

14. L'allure du graphe $\Gamma_{\tilde{G}}$ de la fonction $\tilde{G}$ n'est pas toujours donnée. Souvent, l'asymptote verticale $x = -1$ n'apparaît pas, on trouve une branche infinie au voisinage de valeurs bien plus petites que -1. L'échelle choisie est souvent mal appropriée, et ne permet pas de voir les caractéristiques particulières du graphe. Nous avons également trouvé des courbes qui présentent un point anguleux en c.

Partie II

1. Environ la moitié des candidats justifie correctement le caractère dérivable de la fonction F. Certains se contentent d'écrire que la fonction F est dérivable, mais ne justifient rien. D'autres disent qu' ≪ une intégrale est toujours dérivable ≫.

   Il est clair qu'écrire que ≪ F est dérivable comme produit de fonctions qui le sont ≫ n'est pas suffisant : on demande une justification. Quelques candidats pensent encore que, si H désigne une fonction dérivable, la dérivée de la fonction $x \mapsto H(x) - H(0)$ est la fonction $x \mapsto H'(x) - H'(0)$, ou encore, si h désigne cette fois une fonction, que la dérivée de la fonction $x \mapsto \int_0^x h(t)\,dt$ est la fonction $x \mapsto \int_0^x h'(t)\,dt$, ce qui revient au même et est bien sûr faux.
   Certains candidats ont pensé avoir trouvé une primitive de $t \mapsto e^{t^2}$ sans même vérifier en redérivant.

   Le jury a apprécié les candidats qui reconnaissaient une intégrale fonction de sa borne supérieure, ou faisaient appel au théorème fondamental de l'analyse, en expliquant que la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ était l'unique primitive s'annulant en zéro de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$.

2. La majorité des candidats sait que la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Par contre, peu citent le théorème d'intégration terme à terme. En ce qui concerne le produit de Cauchy, la valeur du rayon de convergence n'est pas toujours donnée.
   De nombreux candidats pensent qu'une fonction de classe C^∞ (sur un domaine qui n'est en plus pas précisé) admet un développement en série entière, en utilisant la formule de Taylor-Young, et en oubliant que cette formule donne un résultat local.

   Cette question s'est donc révélée très classante.

3. La majorité des candidats a bien montré que la fonction F était solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :

   $$y'(x) = -2\,x\,y(x) + 1 \qquad (\mathcal{E})$$

   Pour le reste, nous insistons sur le fait qu'il ne suffisait pas de recopier la formule pour la prouver. Il fallait faire apparaître d'une façon ou d'une autre l'égalité entre la valeur de la dérivée de l'intégrale fonction de sa borne supérieure en $x \in \mathbb{R}$, et e^{x^2}.

4. La majorité des candidats a obtenu la relation de récurrence vérifiée par les a_n, $n \geq 0$.

5. Tous les candidats n'ont pas fait attention au fait que a_0 était nul. Certains l'affirment, mais ne donnent aucune justification. Notons que la question précédente ne donne aucune informations sur la valeur de a_0, seul le calcul de $F(0)$ permet de conclure. Sinon, si une grande proportion de candidats obtient l'expression de a_{2p+1}

en fonction de p, le calcul est souvent trop succinct, sans réelle indication que l'on a multiplié au numérateur et au dénominateur par les termes pairs.

6. Les candidats ayant répondu correctement à la question précédente donnent le développement en série entière de F. Toutefois, certains candidats qui avaient pourtant bien calculé les coefficients à la question précédente, écrivent le développement en série entière de F comme une somme de termes en x^n.
Certains (heureusement rares) candidats pensent que $F(x) = \sin(2\,x)$, ou, encore, $2\,\sin(x)$, mais ne vérifient pas qu'il y a alors un problème avec l'équation différentielle.

7. La majorité des candidats a étudié correctement la convergence de la série de terme général

$$\frac{(-1)^n\,4^n\,n\,!}{(2\,n+1)\,!}$$

Certains candidats écrivent des égalités entre une valeur absolue, et une expression faisant intervenir des $(-1)^n$. D'autres oublient la valeur absolue, ne justifient pas clairement la limite en prenant un équivalent, ou ne précisent pas que convergence absolue implique convergence. D'autres encore s'intéressent à la série entière $\sum \frac{(-1)^n\,4^n\,n\,!\,x^n}{(2\,n+1)\,!}$, mais n'obtiennent pas souvent le résultat correct.

Parfois, lorsque le critère de d'Alembert est vérifié, la conclusion est « u_n converge », au lieu de « $\sum u_n$ converge ». Si c'est manifestement une erreur d'inattention, il n'y a pas de problème, mais, parfois le candidat l'écrit plusieurs fois, ce qui est problématique.
Certains candidats ont, très justement, fait remarquer que cela résultait directement des questions précédentes.

Un nombre très important de candidats calcule le rayon de convergence de la série entière, et non pas la convergence de la série : ils ne répondent donc pas à la question posée. Rappelons que dans ce cas, considérer $F(1)$ permettait de conclure.

8. Peu de candidats ont répondu correctement à cette question. Pour le début, un certain nombre de candidats échangent Σ et $\int$, mais sans aucune justification.

Alors que le premier développement en série entière est bien trouvé par les candidats ayant traité la question malgré, parfois, une confusion entre les variables x et t, seuls quelques rares candidats effectuent correctement le produit de Cauchy. Encore une fois, le résultat étant donné dans l'énoncé, il convient d'être précis dans les justifications.