Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

Un nombre non négligeable de copies sont beaucoup moins bien présentées que l'an dernier : illisibles, indéchiffrables, raturées de partout, ... Ces copies ont été pénalisées. Des copies sont encore écrites avec une encre si pâle que l'on peine à comprendre ce qui y figure.

En ce qui concerne l'orthographe, elle est encore souvent mise à mal.

Enfin, nous rappelons comme lors de la session précédente que la démonstration d'un résultat passe par l'un ou l'autre des chemins suivants :

- ⇝ Le résultat est la conséquence d'un théorème de cours. En ce cas, il convient de le dire. Si le résultat en question est compliqué, il faut en rappeler l'énoncé. C'était le cas des questions II. 1 et II. 3. *a*. Et une fois cela fait, il convient de montrer que les hypothèses du théorème sont vérifiées.

- ⇝ Le résultat est la conséquence d'un résultat précédent. Qu'on ait ou non prouvé ce résultat précédent, il convient d'écrire : « D'après le résultat de la question ... ».

- ⇝ Le résultat se déduit d'un calcul, d'une manipulation d'expression, d'un passage à la limite, d'une intégration par parties ... Dans ce cas, il faut dire ce que l'on fait, et ne pas laisser au correcteur le soin de deviner les arguments qui justifient le passage d'une ligne à l'autre dans une page de calculs.

Remarques particulières

Partie I

1. (a) Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de candidats. On trouve toutefois des copies avec des résultats incorrects, résultant de la non-maîtrise de calculs basiques : $\sqrt{b^2 - 4\,c}$ n'est pas égal à $b^2 - 4\,c$. Quelques candidats donnent la réponse en fonction d'un discriminant qu'ils n'ont pas défini, d'autres laissent un coefficient « a », sans voir qu'il vaut 1. On note aussi quelques erreurs dans les relations coefficients-racines.

   (b) Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de candidats. On notera que certains candidats se sont lancés dans des calculs très compliqués (pas loin d'une page), en utilisant les expressions avec les radicaux obtenues à la question précédente.

   (c) Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de copies, même si de nombreux candidats remplacent $y(t)$ par $e^{r_i t}$, $i = 1, 2$, et vérifient que l'équation est vraie. Par ailleurs, des candidats s'étant trompés sur les relations coefficients-racines du début essayent de faire croire qu'ils ont la solution, en concluant avec des formules du genre « on peut remplacer un $+$ par un $-$ ».

   (d) Cette question a été correctement traitée par environ un tiers des candidats, faute de savoir ce qu'est une solution de $(\mathcal{E}_H)$. De très nombreux candidats (la majorité) partent du résultat en supposant l'existence de C_1 et C_2.

   (e) Comme la précédente, cette question a été correctement traitée par environ un tiers des candidats. Certains candidats évoquent un résultat du cours, sans voir que le but de cette question est de le retrouver. D'autres invoquent le fait que l'espace des solutions est de dimension 2, mais oublient de prouver la liberté de la famille $\left(e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\right)$. Enfin, de nombreux candidats résolvent la première équation de la question précédente (en donnant la solution sous la forme de la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation avec second membre), mais oublient de considérer la seconde équation.

   (f) *i.* Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de candidats, même si on trouve un nombre non négligeable de réponses fausses (en exponentielles diverses, exponentielles-polynômes, fonctions trigonométriques). Il est un peu incroyable de voir des candidats laisser $\sqrt{16}$ à ce niveau !

   ii. Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de candidats. Toutefois, des candidats ayant donné une réponse correcte à la question précédente, ne donnent pas la bonne réponse à celle-ci. Un nombre non négligeable de candidats donne la fonction identiquement nulle comme solution. On trouve aussi des solutions en e^{3t}, e^{5t}. Des candidats affirment qu'il y a une infinité de solutions (ou mieux : ≪ deux uniques solutions ≫ !)

2. (a) Cette question a été correctement traitée par une grande majorité de candidats, même si, trop souvent la parabole (bien orientée) est dessinée sans plus de précisions, on ne sait pas ce qu'est le domaine $\mathcal{D}$ pour le candidat. On trouve aussi de nombreuses réponses fantaisistes : carré, rectangle, disque, demi-plan, etc ...

   (b) Cette question a été correctement traitée par un tiers des candidats. Très peu de candidats vérifient que les applications vont bien de $\mathcal{D}$ dans Δ, et réciproquement. Certains pensent que le fait que la fonction h soit à valeurs dans $\mathcal{D}$ suffit pour montrer que h est bijective. On trouve, trop souvent, que la fonction (de deux variables) est ≪ strictement croissante, donc bijective ≫ (SIC). D'autre part, le signe positif devant la racine dans l'expression de l'application réciproque est très rarement justifié, alors que le système est résolu par équivalences.

   La grande majorité des candidats prouve le caractère C^1 par le fait que les fonctions coordonnées sont C^1, très peu montrent que les dérivées partielles sont continues. D'autres, encore, n'ont pas fait attention que les applications en jeu n'étaient pas linéaires, et font intervenir des noyaux. Certains confondent l'application réciproque h^{-1} avec la fonction $\dfrac{1}{h}$.

   (c) Cette question a été correctement traitée par un tiers des candidats, qui montrent avoir compris la dérivation composée. Un nombre non négligeable de candidats ne sait visiblement pas traiter ce type de question, et essaye de noyer le poisson soit en utilisant les réponses de l'énoncé sans rien démontrer, soit à travers une succession de calculs complètement faux où des éléments de $\mathbb{R}^2$ sont considérés comme des réels. Très souvent, la rédaction laisse à désirer. En particulier, peu de candidats concluent correctement quant à l'équivalence.

   (d) Cette question a été correctement traitée par un faible nombre de candidats. Les correcteurs ont noté beaucoup de confusions au niveau des variables : des ≪ t ≫, en lieu et place des ≪ v ≫, des ≪ x ≫, au lieu des ≪ u ≫, etc ...

Partie II

1. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats, même si de nombreux candidats proposent une valeur pour β^2, et non pour β.

2. Cette question n'a pas été correctement traitée par tous les candidats. Peu de candidats précisent que la fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}$, ne font pas mention du fait que le dénominateur ne s'annule pas, et disent que le problème ne se situe

qu'en $+\infty$, et $-\infty$. De même, peu précisent que les équivalents sont positifs.
De nombreuses copies se réfèrent à des intégrales de la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\,n+2}}$ données comme convergentes. D'autres affirment que comme l'intégrande est de limite nulle en l'infini, alors l'intégrale converge. D'autres, encore, n'ont pas compris la notation « petit o », ou pensent que la variable d'intégration est α. D'autres encore font référence à des séries de Riemann.

En ce qui concerne la valeur de l'intégrale I_0, elle n'est pas toujours correctement donnée. De nombreux candidats obtiennent une valeur nulle.

3. (a) Cette question n'a été correctement traitée que par un faible nombre de candidats. Parmi ceux-ci, très peu donnent une réponse rigoureuse en se ramenant à une intégration par parties sur un segment. On trouve beaucoup de calculs complètement erronés, avec des arctangentes divers, qui donnent, au bout du compte, la réponse clairement recopiée sur l'énoncé.

   (b) Cette question n'a été correctement traitée que par peu de candidats. Beaucoup donnent une réponse certes correcte, mais sans aucune justification, avec des arguments du type « de façon évidente », ou « par une récurrence évidente ». On trouve, aussi, beaucoup de réponses complètement fausses.

Partie III

1. Cette question, facile, a été correctement traitée par la majorité des candidats, même si certains étudient le cas $\Delta < 0$, ou $\Delta = 0$, sans lire l'énoncé.

   Un nombre non négligeable de candidats pensent que le discriminant est négatif pour x négatif, et donnent alors des racines complexes.
   On trouve aussi des réponses complètement fausses.

2. Cette question n'a pas été correctement traitée par la majorité des candidats. Un certain nombre de copies donnent la réponse $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$, ou $\left]-\infty,\frac{1}{4}\right[$, quand ce ne sont pas des choses fantaisistes comme $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Nous rappelons qu'un intervalle avec une borne $+\infty$ ou $-\infty$ ne peut être fermé en cette borne.

3. Cette question n'a pas été correctement traitée par la majorité des candidats. Les réponses sont souvent très approximatives, avec un produit qui s'arrête à n au lieu de $n-1$. Nous rappelons que les coefficients binomiaux non entiers doivent être redéfinis en cas d'utilisation. Nous avons trouvé, dans de nombreuses copies, des « $\alpha\,!$ », « $\left(\frac{1}{2}\right)!$ ». Enfin, de trop nombreuses copies donnent des développements

en série entière où le « $n!$ » est remplacé par un « n ».

4. Cette question n'a pas été souvent correctement traitée. Lorsque c'est le cas, les candidats font souvent une petite erreur à la fin (oubli du signe moins, ou du facteur $\frac{1}{2}$), c'est dommage. La valeur donnée pour le coefficient S_0 est souvent complètement erronée, alors qu'il suffisait de prendre la valeur de la fonction f en zéro. Certains candidats ont heureusement fait un calcul correct, et utilisent un changement d'indice, où la valeur qu'ils donnent pour S_0 est en fait celle de S_1.

5. Cette question n'a pas été souvent correctement traitée, très peu de copies donnent la réponse attendue. Le produit de Cauchy de deux séries entières est confondu avec le produit de Cauchy de deux séries numériques. Des candidats ne semblent pas savoir de quoi il s'agit, confondent produit et somme, ou bien donnent des réponses complètement fantaisistes. Très souvent, les candidats mélangent les indices, ce qui donne des résultats totalement incohérents. On trouve aussi des réponses qui, de façon étonnante, en écho aux questions de la fin, donnent comme réponse :

   $$\sum \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\, b_{n-k} \right) x^n$$

   En ce qui concerne le résultat sur le rayon de convergence de la série produit, il n'est que très rarement donné.

   Dans un nombre important de copies, les candidats confondent développement en série entière et développement limité.

6. Cette question n'a été que rarement correctement traitée. Elle a permis de différencier les candidats. Même s'ils sont minoritaires, ceux qui ont répondu à cette question l'ont bien traitée, ou, en tout cas, ont donné les bons arguments.

7. Cette question n'a été que rarement correctement traitée. Lorsque c'est le cas (pour les candidats qui ont obtenu la valeur correcte des S_n), c'est plutôt bien. Un nombre non négligeable de candidats essaye de noyer le poisson en faisant croire qu'ils obtiennent le résultat donné dans l'énoncé. D'autres tentent de répondre à la question en utilisant un raisonnement par récurrence, mais ans utiliser la valeur de S_n définie précédemment.

8. Cette question a été traitée par environ un quart des candidats. Nous avons trouvé une solution originale : le coefficient binomial étant à valeurs entières, on a donc $S_n \geq \frac{1}{n}$, ce qui conduit bien à la divergence de la série de terme général S_n.

   De nombreuses copies confondent la convergence de la série numérique $\sum S_n$, avec celle de la série entière $\sum S_n\, x^n$. Comme l'an dernier, de nombreux candidats veulent appliquer le critère de d'Alembert à la série entière $\sum S_n\, x^n$, mais ne savent pas conclure. Certains ne connaissent visiblement pas l'orthographe correcte de « d'Alembert ».

Certains candidats font un calcul correct et obtiennent bien que le rapport $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$ tend vers 4, mais concluent sur la convergence de la série.

9. (a) L'énoncé donnait explicitement les valeurs des coefficients C_1 et C_2. Un nombre non négligeable de copies donne pourtant des réponses complètement différentes. Pour le coefficient C_3, la réponse correcte est en général donnée. Il n'en est pas de même pour C_4. De nombreuses copies donnent des résultats sans aucune justification.
Les correcteurs ont apprécié les copies expliquant leur raisonnement à l'aide d'un arbre.

   (b) Cette question a été traitée par un faible nombre de candidats, qui ont montré une très bonne compréhension du problème posé. Ces copies ont été valorisées.

   (c) Cette question a été traitée par un faible nombre de candidats. Peu de copies ont exprimé clairement l'idée d'une relation de récurrence similaire. Quelques rares copies ont fait une récurrence forte.
De nombreux candidats ont tenté un raisonnement par récurrence, mais sans jamais utiliser les caractéristiques des mots de Dyck ! Ce qui ne les empêche pas de conclure que la relation est juste.