Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

Comme l'année précédente, cette épreuve était découpée en un problème d'algèbre linéaire et un exercice de probabilités. Elle s'est révélée très classante, certains candidats, excellents, traitant la quasi-totalité des questions de façon adéquate alors que beaucoup d'autres n'ont abordé que les quelques questions faciles relevant pratiquement de la question de cours.

Reconnaissons tout de suite notre erreur en demandant la matrice hessienne d'une fonction de trois variables, ce qui est officiellement hors programme. Fort heureusement, cette question n'était pas utile pour la suite et n'a pas bloqué les candidats. Il a par ailleurs été tenu compte de cette erreur dans la notation, afin de ne pas pénaliser les candidats ne connaissant pas cette notion dans un cadre général.

Problème d'algèbre linéaire

Ce problème traitait de la minimisation d'une forme quadratique (définie positive) sur $\mathbb{R}^3$, et de sa résolution (dans un cadre général) par la méthode du gradient conjugué. Détaillons question par question les remarques à faire sur ce probème.

Partie I

Il s'agissait ici de réduire une matrice carrée à coefficents réels, symétrique, définie positive, et d'étudier la forme quadratique associée.

Q1. Le fait qu'une matrice symétrique réelle soit diagonalisable est totalement intégré pour la plus grande partie des candidats, la justification de l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres l'est beaucoup moins (beaucoup semblent affirmer qu'une matrice diagonalisable est toujours diagonalisable dans une b.o.n.).

Q2. Malgré de trop nombreuses erreurs de calcul, le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice est assimilé. Pour ceux qui se trompent dans les calculs, il convient d'éviter les réponses aberrantes, telles qu'obtenir le vecteur nul comme unique vecteur propre, ou encore d'obtenir un seul sous-espace propre de dimension 1, alors qu'on a dit juste avant que la matrice était diagonalisable.

Q3. La grande majorité des candidats calculent le déterminant (parfois avec des erreurs) pour répondre à cette question. Les valeurs propres obtenues à la question précédentes suffisaient pour conclure immédiatement. Regrettons la confusion pour un certain nombre de candidats entre « inversible », et « diagonalisable ».

Q4. Que de formules de changement de base écrites à l'envers !

Q5. La première partie de la question a été bien traitée, mais l'écriture de la forme quadratique dans la base de diagonalisation a été catastrophique, beaucoup se lançant dans des calculs inextricables. Ceci montre que beaucoup de candidats maîtrisent les techniques de diagonalisation d'une matrice, mais n'ont aucune idée de l'utilité d'une telle réduction.

Q6,Q7. Deux questions très mal traitées, beaucoup de candidats affirmant certaines inégalités ou implications de façon péremptoire sans aucune justification, à la limite de la malhonnêteté.

Partie II

Nous cherchions à minimiser la forme quadratique

$$J_b(u) = \frac{1}{2} < Au, u > - < u, b >$$

où A est la matrice étudiée dans la première partie et b est un vecteur fixé.

Q1. Cette question a été loin d'être inutile, et a bien mis en évidence que certains candidats manipulent des objets sans avoir conscience de leur nature (scalaires, vecteurs, matrices... tout cela n'est que symboles sans aucune autre réalité). Cette réflexion sur la nature des objets permettrait d'éviter bon nombre d'erreurs.

Q2. La notion de gradient est connue de beaucoup de candidats, nous ne ferons pas de remarque sur la matrice hessienne.

Q3. Que d'inégalités de Cauchy-Schwarz écrites dans le mauvais sens ! Tout cela pour obtenir le bon résultat en soustrayant les inégalités termes à termes (sic). Là encore, un peu d'honnêteté ferait du bien, et un minimum de maitrise sur la manipulation d'inégalités serait souhaitable.

Q4. Cette question a en général été bien traitée.

Q5. Que d'erreurs de raisonnement ! La minoration précédente ne permettait en aucun cas de conclure. Ce n'est pas parce que $x^2 > -1$ que son minimum est négatif !

Q6. Cette question a été relativement bien traitée, même si on pourrait espérer plus de rigueur dans la manipulation des inégalités (arguments de croissance de fonctions, de multiplication par des termes positifs, ...).

Q7,Q8,Q9. Ces questions ont été très peu traitées de façon satisfaisante. Ainsi, beaucoup de candidats pensent qu'un infimum est toujours atteint et l'argument (attendu) pour les fonctions continues sur un fermé borné n'est apparu que sur de très rares copies. Visiblement beaucoup passent à côté du problème et ne comprennent pas vraiment la portée de ce résultat.

Partie III

Nous nous plaçons maintenant dans un cadre général et étudions l'algorithme du gradient conjugué qui permet de calcul numérique de l'inverse d'une matrice symétrique définie positive en au plus n étapes.

Q1. Nous ne savons plus comment l'écrire, alors essayons en gras : **IL FAUT ARRETER D'ELEVER DES VECTEURS AU CARRE ET DE LES MULTIPLIER ENTRE EUX**. Une fois cet axiome assimilé, on pourra alors envisager de faire du calcul vectoriel.

Q2. La notion de famille libre n'est pas assimilée, la majorité des candidats se contentant de dire que les vecteurs ne sont pas colinéaires deux à deux voire non nuls.

Q3. Une question de cours visiblement maîtrisée.

Q4. Une autre question de cours déjà un peu moins bien assimilée sur la multiplication de matrices rectangulaires.

Q5,Q6. Des manipulations sur les matrices relativement bien traitées par beaucoup de candidats. Rappelons toutefois que le produit matriciel n'est pas commutatif. Seul l'argument final a été très souvent escamoté : en effet, $Dv = 0$ n'implique pas que l'un des termes est nul ! ! Cela prouve bien que la notion de noyau d'une application linéaire ou d'une matrice reste une notion très abstraite.

Exercice de probabilités

Notons tout d'abord un réel progrès en probabilités par rapport à l'année dernière. Les manipulations élémentaires semblent maintenant maîtrisées par un certain nombre de candidats, même s'il ne faut pas aborder des notions trop compliquées encore.

Q1. Les lois géométriques et binomiales obtenues respectivement comme premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes et comme nombre de succès dans un nombre n d'épreuves de Bernoulli indépendantes sont reconnues par beaucoup de candidats. Regrettons cependant l'apparition fréquentes de sommes dans la formule de la loi binomiale.

Q2. Là encore, la formule de Bayes apparaît de la bonne façon assez souvent, même si les indices ne sont pas forcément les bons, ce qui aboutit à une formule finale fausse.

Q3. Beaucoup d'erreurs de calcul dans le calcul des dérivées.

Q4. La formule des probabilités totales est connue, mais bien peu de candidats arrivent au bout des calculs, la plupart ne reconnaisant pas la série obtenue à la question précédente.

Q5. L'argument d'indépendance pour le calcul de l'espérance apparaît très souvent (peut être pas encore assez), mais les valeurs de ces espérances pour des lois pourtant usuelles sont très souvent farfelues. Le calcul de la loi de Y a en revanche posé beaucoup de problèmes, et l'on voit très souvent des absurdités telles que

$$P(UV = k) = P(U = k)P(V = k).$$

Quel sens cela peut-il avoir ?

Q6. Cette question, qui nécessitait d'avoir répondu correctement à la précédente, a été très peu traitée.