Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

L'épreuve était cette année divisée en un problème d'algèbre linéaire et un exercice de probabilités totalement indépendants. Ce format devrait perdurer dans les années à venir.

Problème d'algèbre linéaire

La première partie de ce problème étudiait un cas particulier dans $\mathbb{R}^4$ où l'on trouvait un polynôme annulateur d'un endomorphisme (défini par sa matrice dans la base canonique) en étudiant les itérées des deux premiers vecteurs de la base. Si l'on omet les (très nombreux, presque un tiers) candidats qui élèvent des vecteurs au carré ou calculent des déterminants rectangulaires, le début de cette partie a plutôt été bien réussi : calcul de l'image d'un vecteur, relation linéaire entre vecteurs, base ... L'écriture de la matrice de l'application linéaire dans une base autre que la base canonique a en revanche déjà posé beaucoup de problèmes à la majorité des candidats.

Insistons sur le fait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base et qu'un corollaire de cette propriété est que, si une relation linéaire est vérifiée par les vecteurs de la base, elle l'est pour tous les vecteurs de l'espace. Cette propriété importante devait être utilisée plusieurs fois dans ce problème et semble totalement ignorée par la plupart des candidats.

Les seconde et troisième parties du problème étudiaient dans un cadre abstrait l'espace vectoriel engendré par un vecteur **fixé** et ses itérés successifs par un endomorphisme. Nous ne détaillerons pas ici les différentes questions, car nous arrivons, pour la très grande majorité des candidats dans le non-sens le plus total, art qui peut être très drôle lorsqu'il est pratiqué par un anglais mais qui ici est plutôt désolant. Ainsi, le raisonnement mathématique se résume pour beaucoup à prendre un argument au hasard parmi une liste prédéfinie, mettre "donc", et conclure que la propriété demandée est vraie. Il n'est pas rare de voir certains candidats traiter l'intégralité de la partie II sans que le correcteur puisse trouver quelques points à donner. De grâce, privilégiez la qualité à la quantité !

Pour être plus constructif, voici quelques erreurs qui sont revenues très régulièrement et qui pourraient être facilement gommées par un étudiant qui prendrait un peu de temps pour la réflexion :

– Faites attention aux objets que vous manipulez ! Mettre des ensembles égaux à des vecteurs ou des fonctions incluses dans des ensembles dès les premières questions ne met pas le correcteur dans des dispositions particulièrement tolérantes.

– Il y a eu énormément de confusion entre les raisonnements à x fixé ou pour tout x.

– Dans le même ordre d'idée, lorsqu'un vecteur peut s'exprimer comme combinaison linéaire d'une famille de vecteurs, on ne peut pas choisir cette combinaison linéaire (elle est imposée par le vecteur lui-même). En particulier, ces coefficients ne sont pas miraculeusement ceux que l'on a obtenu dans un autre contexte à la question précédente, un argument supplémentaire est nécessaire pour une telle conclusion.

– La notion d'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs n'est pas maîtrisée. Bien souvent, on voit $y \in Vect(x_n)_{n\geq 0} \iff y = \alpha x_n$.

Fort heureusement, ce problème se terminait par un exercice de diagonalisation d'une matrice 3×3, ce que pratiquement tous les candidats maîtrisent. Cela semble être la seule compétence acquise en algèbre linéaire pour beaucoup d'entre eux.

Exercice de probabilités

Cet exercice consistait à prendre un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi était donnée et à en déduire les lois marginales, la loi de la différence, des lois conditionnelles et des questions d'indépendance de variables. L'exercice se terminait par une question de "modélisation" d'un problème réel (en lien avec les questions précédentes). Il s'agit d'un exercice très standard qui devrait être maîtrisé par tout candidat qui a fait un minimum de probabilités dans son cursus. Il s'avère que cet exercice a classé les candidats en trois catégories bien distinctes et équilibrées en nombre : ceux qui ont compris les bases du calcul des probabilités et ont réussi plutôt bien l'exercice, ceux pour qui le langage des probabilités s'apparente à on ne sait quel langage extra-terrestre, et qui écrivent n'importe quoi dès la première question (ainsi a-t-on très souvent vu $\mathbb{P}(X - Y = n) = \mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)$, ce qui permet au passage d'obtenir des probabilités négatives, certains justifiant cette formule par l'indépendance des variables X et Y pour faire plus sérieux, bien que les variables X et Y ne soient pas indépendantes) et enfin ceux qui ont l'honnêteté de ne même pas aborder l'exercice.

Les probabilités viennent de faire leur apparition dans le programme et on peut donc faire preuve d'indulgence cette année concernant ce chapitre. Cependant, elles font désormais partie à part entière du programme de mathématiques et comme précisé en préambule, un exercice de probabilités sera systématiquement présent dans les années à venir. Il convient donc de faire un gros effort de compréhension sur ce thème si l'on ne veut pas partir avec une note de base inférieure à 20 sur cette épreuve.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques B

Le sujet de cette année est constitué de quatre parties totalement indépendantes constituant trois blocs d'égale importance et de difficulté progressive.
Le premier bloc, regroupant les parties I et II porte sur la géométrie analytique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Il s'agit dans la première partie de déterminer la tangente à une courbe de l'espace définie comme intersection de deux surfaces. Dans la seconde partie, on recherche la développée d'une courbe paramétrée du plan à l'aide de l'enveloppe des normales avant de vérifier sur un point particulier que le cercle de courbure est le cercle ≪ le plus proche ≫ de la courbe. Ces deux parties sont des applications directes du cours. Pourtant, elles ont été les moins abordées par les candidats : un candidat sur six a fait l'impasse sur la partie I (sauf 1 (a)) et autant sur la partie II, on passe à un candidat sur quatre sur les questions II 1 (normales et enveloppe des normales).
Le deuxième bloc, constitué de la partie III, est un exercice de géométrie ≪ pure ≫, davantage centré sur le programme de première année. Presque tous les candidats ont plus ou moins abordé cette partie avec plus ou moins de réussite.
Le dernier bloc, constitué de la quatrième partie, est un exercice d'algèbre linéaire. Il s'agit d'étudier un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ non diagonalisable dont le carré était diagonalisable sans avoir recours à une matrice.

Les résultats sont très contrastés. Si on rencontre peu de copies vides, on trouve par contre un nombre non négligeable de copies où seules une ou deux questions ont été traitées avec succès (en général I 1 et III 1 b). On trouve également de très bons candidats ayant traité avec succès la quasi-totalité du sujet. Les questions de cours ou d'application directe du cours sont trop souvent négligées. Les correcteurs ne peuvent que conseiller aux futurs candidats d'apprendre et de maîtriser leur cours.

La présentation des copies s'est nettement dégradée cette année. Si heureusement, on compte très peu de copies qui ressemblent à des torchons, par contre, moins d'un candidat sur deux $\boxed{\text{encadre}}$ les résultats de ses démonstrations, comme cela est demandé par l'énoncé... Pour cela, l'usage d'une règle est indispensable et il est conseillé d'utiliser une couleur différente de la couleur d'écriture. Comme l'an dernier, l'orthographe de certaines copies laisse à désirer. Il serait souhaitable que les noms propres (Pythagore et Chasles) soient écrits avec des majuscules et que des mots d'usage courant en mathématiques et dont la plupart figure dans l'énoncé soient correctement orthographiés et tout particulièrement : mathématiques, tangent(e), degré, développée et enveloppe, coordonnée(s), gradient ...

Côté rédaction, il est indispensable que les candidats définissent leurs notations : des fonctions dans la partie I, des vecteurs et droites dans la partie II, des points dans la partie III, des sous-espaces propres dans la partie IV... et qu'ils utilisent de préférence des noms non utilisés dans la suite de l'exercice et explicites : par exemple : P, Q, P_1 pour des polynômes plutôt que A ou x ; X et P' étant à exclure. Ils doivent également respecter les

notations de l'énoncé : par exemple, le point de la courbe Γ de paramètre t se note M_t et non $M(t)$ ou $A(t)$, et le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la partie III se note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et non $< \vec{u}, \vec{v} >$ ou encore moins $\vec{u} \times \vec{v}$.
Comme l'an dernier, les candidats sont invités à utiliser le théorème de Pythagore et la relation de Chasles et pas simplement Pythagore et Chasles. Ils éviteront également les abréviations et le style télégraphique.
On constate également de nombreuses confusion de vocabulaire et/ou de notions : Image et invariant(s), parallèles et colinéaires, diagonale et diamètre, cercle et disque, milieu et centre, bissectrice, médiatrice et médiane, degré, dimension et rang ... Par ailleurs de nombreux candidats ne semblent pas faire la différence entre AB (la longueur), $\overrightarrow{AB}$ (le vecteur), $[AB]$ (le segment) et (AB) (la droite) ...
De plus, un peu plus d'attention, vis-à-vis de la nature des objets qu'ils manipulent, devrait permettre aux candidats d'éviter de : dériver une surface ou une courbe, faire le produit vectoriel de deux vecteurs du plan, la somme d'un réel et d'un vecteur, d'écrire une équivalence ($\Leftrightarrow$) entre un ensemble ou une équation, qu'un endomorphisme contient un vecteur ou qu'il est non vide, que le centre d'un cercle est une longueur ou un vecteur ou que des ensembles de $\mathbb{R}^2$ sont des sphères, des plans ou ... des paraboloïdes.

Avant de passer au détail question par question, nous rappellons aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre...

Partie I

Question 1 : Presque tous les candidats savent comment faire cette question, même si elle n'est pas toujours bien rédigée.

Question 2 et 3 : Les candidats qui connaissent leur cours font ces deux questions sans problème ... exception faite des erreurs de calculs. Malheureusement, seul un candidat sur deux parvient à trouver le plan tangent et un sur quatre la tangente...
Les candidats peuvent (doivent) vérifier qu'ils n'ont pas fait d'erreur sur le calcul d'un produit vectoriel en s'assurant que le vecteur obtenu est bien orthogonal aux deux vecteurs de départ.
Une équation cartésienne d'un plan (de $\mathbb{R}^3$) est de la forme $ax+by+cz=d$, et inversement $ax+by+cz=d$ représente (dans $\mathbb{R}^3$) un plan même lorsque $c=0$ (et $(a,b) \neq (0,0)$).

Partie II

Questions 1 : Là encore, les candidats qui connaissent leur cours ont fait ces questions sans problème ... exception faite des (nombreuses) erreurs de calculs. Ne pas oublier de dire où est le paramètre t. Attention toutefois à ne pas confondre le rayon de courbure avec le rayon du cercle de courbure.
Les (futurs) candidats doivent faire attention sur la façon dont les questions (b) et (c) sont posées : les mentions ≪ en déduire ≫ et ≪ utiliser ce résultat ≫ imposent d'utiliser l'enveloppe des normales à la courbe pour trouver sa développée et d'utiliser la développée pour trouver le centre et le rayon du cercle de courbure. Attention : le rayon de courbure n'est pas égal à $\lambda(t)$ (pour reprendre la notation la plus utilisée) : le vecteur choisi pour diriger la normale n'est pas unitaire, il faudrait aussi vérifier s'il est convenablement orienté.

On a parfois l'impression que les candidats pensent qu'il n'existe qu'un seul vecteur (ou éventuellement deux en le normant) tangent à une courbe... Si u en est un, λu ($\lambda \neq 0$) en est un autre mais qui n'est pas égal au précédent (sauf si $\lambda = 1$).

Pour la question (b), un certain nombre de candidats ont, semble-t-il, confondu la recherche de la développée avec celle d'une représentation paramétrique de la surface réglée engendrée par les normales.
Manifestement, d'autres candidats savaient faire cette question mais n'y sont pas parvenus parce que les notations de l'exercice ne sont pas celles qu'ils ont dans leur cours : ils n'ont pas su quoi faire de u. Il est gênant pour de futurs ingénieurs de ne pas savoir s'adapter aux notations qui ne sont pas celles auxquelles ils sont habitués.

Question 2 (a) : Un petit dessin (repère où on place le point M_{-1}, le vecteur tangent associé, l'esquisse du cercle) aurait permis à nombre de candidats d'éviter de placer le centre du cercle sur la tangente à la courbe. Si on a bien $r > 0$, par contre, ce n'est pas le cas de $a + 1$, il ne faut donc pas oublier les valeurs absolues.

Question 2 (b) : Les équations de cercles semblent connues. Il faut faire attention à la formulation de la question.

Question 2 (c) : Cette question n'a pas été assez abordée au goût des correcteurs ... Le développement limité (en 0) de $h \mapsto \dfrac{1}{1-h}$ est bien connu, celui de $h \mapsto \dfrac{1}{(1-h)^2}$ a posé plus de problèmes ... mais presque moins que celui de $h \mapsto (1-h)^2$ ... La formule de Taylor-Young est une méthode efficace pour répondre à cette question.
Deux remarques : quand on pose $t = -1+h$, on n'a pas $x(t) = x(h)$ mais $x(t) = x(-1+h)$ et il ne faut pas développer les termes en $(1+t)^k$.

Question 2 (d) : Cette question n'a d'intérêt que si les questions précédentes ont été correctement traitées ...

Partie III

Il est possible de transformer tout ou partie de cet exercice en un exercice de géométrie analytique. Il suffit d'indiquer soigneusement le repère utilisé ainsi ses caractéristiques (repère qui peut varier d'une question à l'autre). Nombre de candidats l'ont fait, mais on ne sait presque jamais quel est le repère utilisé (on devine juste qu'il a pour origine le point O).
Pour cette partie, les illustrations graphiques sont les bienvenues. Elles ont bien aidé les correcteurs à suivre les démonstrations parfois tortueuses des candidats. Il est dommage que tous les candidats ne le fassent pas et étonnant que certains candidats puissent faire de la géométrie sans aucun dessin. Attention toutefois à ne pas choisir des cas particuliers (droite D passant par le point O).

Question 1 (a) : assez bien réussie. Il ne suffit pas de dire qu'un triangle soit inscrit dans un cercle pour qu'il soit rectangle. De plus, le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires n'est toujours égal au produit de leurs normes.

Question 1 (b) : les réponses sont souvent justes quoique pas toujours justifiées.

Question 1 (c) : il s'agit d'une question de cours pour (i) et le théorème de Pythagore règle la question (ii) en deux lignes.

Question 2 (a) : cette question a fait l'objet de nombreux ≪ passages en force ≫. Les correcteurs lisent la totalité des copies, il est donc inutile, voire dangereux, d'essayer de leur faire croire que l'on a fait la question alors que l'on a escamoté les termes qui gênaient ou quelques étapes que l'on ne sait pas faire ...

Question 2 (b) : (i) souvent bien faite.
(ii) la longueur ΩI_0 ne suffit pas à positionner le point I_0.
(iii) Beaucoup ont identifié une droite et même la droite passant par I_0 et orthogonale à (OO') sans se rendre compte qu'ils n'avaient qu'une inclusion. De rares copies ont étudié la réciproque.

Question 2 (c) : de nombreuses bonnes réponses ... rarement justifiée s... et régulièrement en contradiction avec la question précédente.

Question 2 (d) : il est étonnant de trouver des tracés (parfois justes) alors que la question (b) n'a pas été traitée ou des tracés incohérents avec la question (b).
On aurait aimé trouver systématiquement l'application numérique de la question (b) (ii).

Question 3 (a) : rarement traitée, jamais avec succès. Il s'agissait d'établir la réciproque que la question 1.

Question 3 (b) : (i) beaucoup de candidats ont compris qu'on leur demandait une identité de polarisation (même si certains lui donnent un autre nom) ; elle est juste dans un peu plus d'un cas sur deux. (ii) Il y a (au moins) deux façons de calculer $|z|^2$: $(\mathcal{R}e(z))^2 + (\mathcal{I}m(z))^2$ choisie par la grande majorité des candidats, et $(z\overline{z})$ qui était plus efficace ici.

Question 3 (c) : La formulation de cette question, contrairement à la précédente, n'imposant pas de méthode, on peut chercher le centre et le rayon du cercle circonscrit à ABC (qui sont heureusement ≪ raisonnables ≫) puis vérifier que D est sur ce cercle. Ceux qui ont utilisé le résultat de la question 3 (a), ainsi que l'espéraient les auteurs du sujet, ont souvent oublié de vérifier l'alignement des points.

Partie IV

Cette partie est conçue pour être traitée sans avoir recours aux matrices, mais il est possible de les utiliser pour certaines questions à condition de préciser la base utilisée (on rappelle que tous les espaces vectoriels ne disposent pas d'une base canonique) et de rester en dimension quelconque.
Le théorème du rang a été très souvent malmené dans cette partie (questions 1b, 2b, c, e).

Question 1 (a) : L'inclusion des noyaux (et non pas des « *ker* ») est souvent bien démontrée. Par contre la conséquence sur les valeurs propres est souvent fausse. Les (futurs) candidats peuvent vérifier, en utilisant par exemple, la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ que l'affirmation « les valeurs propres de f^2 sont les carrés de celles de f » est fausse. Il est étonnant de voir de nombreuses fois que « f et f^2 ont les mêmes valeurs propres ».
Comme l'an dernier, on rappelle que $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$ mais que la réciproque est fausse en général.

Question 1 (b) : Cette question a été peu réussie ... un mélange aventureux du théorème du rang et de la formule de Grassmann a souvent transformé, on ne sait comment, des inégalités larges en strictes.

Question 1 (c) : Cette question n'a été que très peu abordée et encore moins réussie. Elle ne nécessite pourtant que la définition du polynôme caractéristique (avec un déterminant) et la propriété $\det(f)\ \det(g) = \det(f \circ g)$ (et non $\det(f\, g)$).
On rappelle que dans $\mathbb{R}$, tous les polynômes ne sont pas scindés. De plus, la question (a) ne donne aucune information quant à la multiplicité des valeurs propres de f^2.

Question 2 (a) : Nombre de candidats n'en démontre que la moitié ... pas toujours la même .. sans même souvent mentionner l'autre moitié.
Pour la linéarité : on conseille aux candidats de la démontrer soigneusement, 3 égalités sont en général suffisantes, à condition de ne pas oublier de préciser dans quel(s) ensemble(s) se trouvent les objets manipulés. Cela est bien plus rentable que des formulations toutes faites qui sont au mieux douteuses (« par linéarité de la somme et du produit » : $P \mapsto P+1$ et $P \mapsto P \times P$ ne sont pas linéaires), au pire complètement fausses (« par linéarité des polynômes »). Il est inutile de démontrer que $f(0) = 0$.
Pour $f(E) \subset E$: C'est ici que $n \geqslant 3$ est utilisé. On a uniquement $\deg(f(P)) \leqslant 3$ ... On rappelle que $\deg(0) = -\infty$, $P \in \mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow \deg(P) \leqslant n$, et que le produit de deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas toujours un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question 2 (b) : « La » méthode d'obtention du noyau est bien connue. Beaucoup arrivent à $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$ et sans doute emportés par leurs habitudes sur les produits scalaires, en déduisent que $P = 0$. On trouve trop souvent « $\ker(f) = 0$ donc $\dim(\ker(f)) = 1$ ».

L'image se limite souvent à $\{P \in E\,;\, \exists\, Q \in E, f(Q) = P\}$. La caractérisation à l'aide des images d'une base est peu utilisée ; elle mène pourtant facilement au résultat.
Attention : l'image et le noyau de f ne contiennent que des polynômes, pas de vecteurs colonnes. On rappelle que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ et on signale que le théorème du rang aurait dû permettre de déceler quelques erreurs.

Question 2 (c) (d) : il s'agit de questions de cours. L'injectivité est mieux maîtrisée que la surjectivité. Il ne suffit pas de dire que f est un endomorphisme pour affirmer ≪ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective ≫. On trouve beaucoup trop souvent : ≪ $f(0) = 0$ donc 0 est valeur propre de f ≫ et ≪ la multiplicité de la valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre ≫.

Question 2 (e) : Question réussie par presque tous les candidats l'ayant abordée.

Question 2 (f) (g) (h) : ces questions font la synthèse de toutes les questions précédentes. On trouve quelques très bonnes réponses, ce qui prouve qu'il y a, heureusement, des candidats pour lesquels l'algèbre linéaire ne se limite pas à diagonaliser des matrices 3×3.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

En ce qui concerne la présentation des copies, on note un effort très important des candidats, les copies sont, en général, très bien présentées. Toutefois, il reste encore un nombre non négligeable de copies à peu près illisibles (soit à cause d'une encre tellement pâle qu'elle en devient presque transparente, soit parce que c'est, vraiment, indéchiffrable). On ne peut que recommander l'encre noire, qui facilite la lecture du correcteur. Le stylo à bille n'a pas ces défauts, mais les copies ainsi écrites donnent souvent une impression de relâchement désagréable. Rappelons que bien souvent l'exactitude, ou la fausseté, d'une solution tient à peu de chose : un indice dans une somme, un exposant dans une expression ... et c'est ce que le correcteur va rechercher.

L'orthographe est de plus en plus mise à mal. Le nombre de mots utilisés dans un devoir de mathématiques n'est pas tel qu'on puisse excuser certaines fautes comme ≪ une limitte ≫, ≪ un interval ≫, ≪ une intégral ≫ ... La conjugaison est aussi parfois bien approximative. Pour se limiter aux verbes du premier groupe, on a vu dans la même copie ≪ On a montrer ≫, et ≪ On va montré ≫. Le sort des verbes ≪ résoudre ≫, ou ≪ déduire ≫ est encore moins enviable ... Certains noms propres sont écorchés (≪ Dalembert ≫, au lieu de ≪ D'Alembert ≫).

En ce qui concerne les abréviations, celles-ci sont à proscrire (≪ cv ≫, au lieu de ≪ converge ≫).

Nous rappelons également aux candidats que la démonstration d'un résultat passe par l'un ou l'autre des chemins suivants :

⇝ Tout résultat est la conséquence d'un théorème de cours. En ce cas, il convient de le dire. Si le résultat en question est compliqué, il faut en rappeler l'énoncé. C'était le cas des questions II. 1 et II. 3. *a*. Et une fois cela fait, il convient de montrer que les hypothèses du théorème sont vérifiées.

⇝ Tout résultat est la conséquence d'un résultat précédent. Qu'on ait ou non prouvé ce résultat précédent, il convient d'écrire : ≪ D'après le résultat de la question ... ≫.

⇝ Tout résultat se déduit d'un calcul, d'une manipulation d'expression, d'un passage à la limite, d'une intégration par parties ... Dans ce cas, il faut dire ce que l'on fait, et ne pas laisser au correcteur le soin de deviner les arguments qui justifient le passage d'une ligne à l'autre dans une page de calculs.

D'autre part, les candidats ont tendance à utiliser partout et incorrectement les symboles « $\Longrightarrow$ », et « $\Longleftrightarrow$ », alors qu'il n'y a pas d'équivalence. Un raisonnement mathématique n'est pas une succession de symboles utilisés à tout bout de champ, une rédaction appropriée avec l'emploi de « donc », « soit », « d'où », permet d'éviter de telles incorrections, et facilite, en outre, la compréhension. Enfin, nous rappelons qu'il faut bien faire la distinction entre une fonction, objet mathématique (disons « f »), et son expression en un réel x.

Il y a, aussi, fréquemment des confusions entre les différentes variables, ce qui est très grave (entre n et x en première partie, entre x et t pour les intégrales à paramètres, et entre t et t_0 pour les équations différentielles).

Enfin, certains candidats ne lisent pas bien l'énoncé ou ne répondent pas à la question posée, font le sujet dans un désordre complet : dans ce cas, il est préférable de préciser sur la copie que certaines questions sont traitées ultérieurement.

Remarques particulières

Partie I

1. Cette question a été traitée par la majorité des candidats, bien que peu utilisent les quantificateurs :

   $$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = f(-x)$$

   ou une formulation équivalente en français. Ils se contentent souvent de calculer $f(-x)$, sans que le « x » n'ait été défini.

   Certains ne semblent pas connaître les notions de parité/imparité pour une fonction numérique réelle. Et une fonction paire n'est pas une « fonction symétrique par rapport à 0 ».

2. (a) La plupart des candidats connaissent les propriétés des fonctions hyperboliques. Certains reviennent à la définition avec l'exponentielle et s'en sortent très bien. Nous rappelons que la fonction sinus hyperbolique est notée « sh ».

   (b) Cette inégalité n'a pas toujours été démontrée correctement. Certains candidats donnent le résultat sans aucune justification. D'autres veulent utiliser un développement limité, ce qui ne peut conduire au résultat.

   (c) En ce qui concerne le tracé : certains candidats ne tracent qu'une seule des deux courbes ; certains ne répondent pas à la question posée, qui est de tracer le graphe sur $[0, 1]$ (on trouve des graphes sur $[-1, 1]$) ; le papier millimétré n'est pas toujours utilisé (graphe sur la copie, calculs sur la feuille de papier millimétré) ; l'échelle n'est pas toujours respectée ; d'autres omettent la légende, on ne sait pas laquelle des deux courbe est le graphe de f_1 ; certains tracés sont complètement erronés (valeur -1 pour chacune des deux fonctions en zéro) ; les concavités sont parfois très fantaisistes. A côté, certaines copies avaient des graphes très soignés. L'usage de couleurs a été apprécié.

3. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Peu de candidats néanmoins insistent sur le fait que les fonctions sont dérivables comme somme, composées de fonctions dérivables.

   (b) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Toutefois, l'étude du signe de chacune des dérivées manque, souvent, de justifications : étudier les variations des fonctions ne consiste pas à simplement donner un tableau de variations. Celui-ci n'est pas toujours donné, les candidats se contentant d'écrire : « la fonction est croissante ». Nous rappelons que faire un tableau de variations facilite, énormément, la lecture, et pour le correcteur, et pour le candidat. Certains candidats oublient de conclure, après avoir bien prouvé que les dérivées sont positives. Un certain nombre de copies contient l'erreur consistant à déterminer les réels x pourlesquels $f_n(x) = 0$, puis en déduire les variations de f_n. Tous les candidats ne lisent pas bien la question, en s'embarquant dans de laborieux équivalents en $+\infty$, alors que seules les variations des fonctions sont demandées.

   (c) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Cependant, certains candidats étudient, inutilement, les limites en $+\infty$.

   (d) Cette question a été traitée par la majorité des candidats.
   Très peu de candidats justifient que le passage à la puissance n (ou $-n$) est valide car la fonction qui, à tout réel positif t, associe t^n, est croissante sur $\mathbb{R}^+$, et que, pour tout réel x de $[0, \sqrt{n}]$: $1 - \dfrac{x^2}{n} \geq 0$.

   A la question « l'inégalité de droite est-elle vraie pour les réels positifs ? », il convient de donner une réponse argumentée. Un simple « oui » ne suffit pas.

   (e) Les limites demandées étaient classiques : moins d'un candidat sur quatre trouve la valeur exacte, parmi les réponses données, on trouve : zéro, 1, $+\infty$. De nombreux candidats composent l'équivalent par l'exponentielle, ce qui n'est pas possible, au lieu de raisonner avec des « o ». Et écrire « de même », sans plus de détails, est insuffisant dans ce contexte pour prouver la deuxième limite.

4. (a) Cette question n'a été traitée que par peu de candidats. Ceux qui l'ont fait passent, en général, par une étude de fonction. Seules les très bonnes copies ont pensé à utiliser la formule du binôme de Newton. La majorité des candidats ayant commencé cette question utilisent des inégalités sans justification. Souvent, ces inégalités reviennent à écrire « $x^2 < \dfrac{x^2}{n}$ ».

(b) Certains candidats se réfèrent aux intégrales de Riemann, et justifient leur réponse en écrivant « car $\dfrac{1}{2} < 1$ », ce qui est correct, mais tellement évident qu'il serait peut-être mieux de dire, tout simplement, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann de référence. De nombreux candidats écrivent des égalités ou inégalités avant d'avoir prouvé la convergence des intégrales. Par exemple, plutôt qu'écrire « $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(t)\,dt = \int_0^1 \varphi(t)\,dt + \int_1^\infty \varphi(t)\,dt$ », il convient d'écrire « $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(t)\,dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_1^\infty \varphi(t)\,dt$ convergent ». D'autre part, De nombreux candidats oublient de préciser que les critères de comparaison (par inégalité ou équivalent) nécessitent que les fonctions soient positives au voisinage de $+\infty$. Enfin, nous rappelons aussi qu'une intégrale de la forme $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,dt$ converge non pas parce que l'intégrande est continue en 0, mais parce qu'elle l'est sur $[0, 1]$.

(c) Cette question a été traitée par la majorité des candidats.

Partie II

1. Cette question a souvent été traitée de manière approximative : de nombreux candidats se contentent de vérifier la convergence de l'intégrale ; pour l'hypothèse de domination, certains candidats majorent l'intégrande par 1 ou e^t, en affirmant que la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^+$ (ou l'exponentielle) est intégrable sur $\mathbb{R}^+$; enfin, on trouve aussi une faute courante consistant à majorer $e^{-t\,x^2}$ par e^{-x}, e^{-t}, sans se soucier de la position de t par rapport à 1.

2. Cette question a été traitée par la majorité des candidats.

3. (a) Comme en II. 1, cette question a souvent été traitée de manière approximative, avec les mêmes erreurs qu'en II. 1. Un nombre non négligeable de candidats dérive par rapport à la mauvaise variable. On ne peut que les inciter à prendre du recul face à une dérivée trop compliquée à utiliser par la suite. De même, ces candidats ne se posent pas la question de savoir pourquoi on regarde ce qui se passe sur $[a, +\infty[$, et non sur $\mathbb{R}^+$ comme à la question 1.

   (b) En général, les candidats se contentent de dire que cela découle de la question précédente sans plus de précision. Les bonnes copies précisent qu'on peut recouvrir $\mathbb{R}^+$ avec les intervalles $[a, +\infty[$, $a > 0$.

4. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. La positivité de l'intégrale est souvent bien utilisée. En revanche, on trouve dans de nombreuses copies (parfois bonnes) que la limite de h en l'infini est 1, sans aucune justification. De nombreux candidats prouvent la positivité de h en passant à la limite lorsque t tend vers l'infini, sans justifier l'interversion limite-intégrale.

5. Cette question n'a été traitée que par un petit nombre de candidats. Cette question dépend beaucoup de la question 3. *a.*, et certains candidats ont perdu beaucoup de temps à cause d'un calcul erroné de la dérivée. La plupart d'entre eux n'ont pas pensé à faire un changement de variable dans l'intégrale représentant $h'(t) - h(t)$. Certains candidats se contentent de donner un résultat sans aucune justification.

6. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Toutefois, certains candidats donnent les solutions $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto A\,e^{-t}$, $A \in \mathbb{R}$, ou omettent la constante A. Quelques candidats donnent $\frac{\pi}{2}$ comme constante.

   (b) La question était posée de manière très claire, pourtant, certains candidats ont cherché, en vain, une primitive à l'aide des fonctions usuelles. De nombreux candidats gardent t comme borne et comme variable d'intégration.

   (c) Les bonnes copies utilisent la méthode de variation de la constante, ou montrent que la fonction h est une solution particulière. Cette dernière méthode est également utilisée dans les copies moins bonnes, mais la rédaction y est très confuse.

7. (a) Comme en I., certains candidats se réfèrent aux intégrales de Riemann, et justifient leur réponse en écrivant « car $\frac{1}{2} < 1$ », ce qui est correct, mais tellement évident qu'il serait peut-être mieux de dire, tout simplement, que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann de référence. D'autre part, nous rappelons que ce n'est pas parce que deux intégrales sont de même nature, qu'elles sont égales. On trouve, aussi, dans de nombreuses copies, une étude en l'infini de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$, ce qui n'a pas d'intérêt ici. Enfin, si le changement de variable est correctement effectué, le caractère C^1 bijectif du changement de variables est souvent absent de la rédaction. Nous rappelons également que $\sqrt{x^2} = |x|$ et vaut x si et seulement si x est positif.

   (b) Cette question n'a été traitée correctement que par peu des candidats, il fallait justifier que l'on prenne $t_0 = 0$, ou que l'on utilise la relation de Chasles, ce qui n'a en général pas été fait du tout (le remplacement de t_0 par 0 étant fait sans aucune justification).

8. Cette question a été traitée par la majorité des candidats, par contre, la justification $e^{-t} > 0$ n'est pas toujours présente. Certains candidats justifient en disant que

l'exponentielle est croissante, d'autres disent les deux ...

9. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Toutefois, certains donnent des valeurs fantaisistes, en contradiction complète avec ce qu'ils ont écrit auparavant.

Partie III

1. Cette question a donné lieu à pas mal d'erreurs : de nombreuses majorations sont fausses ou non justifiées ; la règle de d'Alembert est parfois utilisée incorrectement (de nombreux candidats ne prennent pas la valeur absolue du quotient) ; certains candidats semblant penser que le quotient de deux termes consécutifs doit être inférieur à 1 pour que la série converge. D'autre part, certains candidats confondent série numérique et série entière.

2. Il fallait, ici, absolument donner la valeur du rayon de convergence de la série entière, ce qui n'a pas toujours été le cas : le développement en série entière de l'exponentielle est connu, mais le domaine où il est valable est souvent omis ou faux.

3. Très peu de candidats ont correctement justifié l'intégration terme à terme de la série entière. Et étant donné que la formule à trouver est donnée dans la question, il convient de détailler le raisonnement. En particulier une primitive de la fonction qui, à tout réel positif t, associe t^{2n}, doit être donnée.

4. (a) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats. De nombreux candidats veulent choisir un entier n tel que $\dfrac{1}{(n+1)\,!(2n+3)} = \varepsilon$, au lieu de $\dfrac{1}{(n+1)\,!(2n+3)} \leq \varepsilon$, ce qui semble difficile à réaliser. Dans les bonnes copies seulement on trouve une méthode clairement exposée (sinon, c'est en général une suite de calculs sur les restes d'une série convergente, sans lien direct avec la question).

   (b) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats. Quelques candidats poussent le développement trop loin.