Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

En ce qui concerne la présentation des copies, on note un effort très important des candidats, les copies sont, en général, très bien présentées. Toutefois, il reste encore un nombre non négligeable de copies à peu près illisibles (soit à cause d'une encre tellement pâle qu'elle en devient presque transparente, soit parce que c'est, vraiment, indéchiffrable). On ne peut que recommander l'encre noire, qui facilite la lecture du correcteur. Le stylo à bille n'a pas ces défauts, mais les copies ainsi écrites donnent souvent une impression de relâchement désagréable. Rappelons que bien souvent l'exactitude, ou la fausseté, d'une solution tient à peu de chose : un indice dans une somme, un exposant dans une expression ... et c'est ce que le correcteur va rechercher.

L'orthographe est de plus en plus mise à mal. Le nombre de mots utilisés dans un devoir de mathématiques n'est pas tel qu'on puisse excuser certaines fautes comme ≪ une limitte ≫, ≪ un interval ≫, ≪ une intégral ≫ ... La conjugaison est aussi parfois bien approximative. Pour se limiter aux verbes du premier groupe, on a vu dans la même copie ≪ On a montrer ≫, et ≪ On va montré ≫. Le sort des verbes ≪ résoudre ≫, ou ≪ déduire ≫ est encore moins enviable ... Certains noms propres sont écorchés (≪ Dalembert ≫, au lieu de ≪ D'Alembert ≫).

En ce qui concerne les abréviations, celles-ci sont à proscrire (≪ cv ≫, au lieu de ≪ converge ≫).

Nous rappelons également aux candidats que la démonstration d'un résultat passe par l'un ou l'autre des chemins suivants :

⇝ Tout résultat est la conséquence d'un théorème de cours. En ce cas, il convient de le dire. Si le résultat en question est compliqué, il faut en rappeler l'énoncé. C'était le cas des questions II. 1 et II. 3. *a.* Et une fois cela fait, il convient de montrer que les hypothèses du théorème sont vérifiées.

⇝ Tout résultat est la conséquence d'un résultat précédent. Qu'on ait ou non prouvé ce résultat précédent, il convient d'écrire : ≪ D'après le résultat de la question ... ≫.

⇝ Tout résultat se déduit d'un calcul, d'une manipulation d'expression, d'un passage à la limite, d'une intégration par parties ... Dans ce cas, il faut dire ce que l'on fait, et ne pas laisser au correcteur le soin de deviner les arguments qui justifient le passage d'une ligne à l'autre dans une page de calculs.

D'autre part, les candidats ont tendance à utiliser partout et incorrectement les symboles « $\Longrightarrow$ », et « $\Longleftrightarrow$ », alors qu'il n'y a pas d'équivalence. Un raisonnement mathématique n'est pas une succession de symboles utilisés à tout bout de champ, une rédaction appropriée avec l'emploi de « donc », « soit », « d'où », permet d'éviter de telles incorrections, et facilite, en outre, la compréhension. Enfin, nous rappelons qu'il faut bien faire la distinction entre une fonction, objet mathématique (disons « f »), et son expression en un réel x.

Il y a, aussi, fréquemment des confusions entre les différentes variables, ce qui est très grave (entre n et x en première partie, entre x et t pour les intégrales à paramètres, et entre t et t_0 pour les équations différentielles).

Enfin, certains candidats ne lisent pas bien l'énoncé ou ne répondent pas à la question posée, font le sujet dans un désordre complet : dans ce cas, il est préférable de préciser sur la copie que certaines questions sont traitées ultérieurement.

Remarques particulières

Partie I

1. Cette question a été traitée par la majorité des candidats, bien que peu utilisent les quantificateurs :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = f(-x)$$

ou une formulation équivalente en français. Ils se contentent souvent de calculer $f(-x)$, sans que le « x » n'ait été défini.

Certains ne semblent pas connaître les notions de parité/imparité pour une fonction numérique réelle. Et une fonction paire n'est pas une « fonction symétrique par rapport à 0 ».

2. (a) La plupart des candidats connaissent les propriétés des fonctions hyperboliques. Certains reviennent à la définition avec l'exponentielle et s'en sortent très bien. Nous rappelons que la fonction sinus hyperbolique est notée « sh ».

   (b) Cette inégalité n'a pas toujours été démontrée correctement. Certains candidats donnent le résultat sans aucune justification. D'autres veulent utiliser un développement limité, ce qui ne peut conduire au résultat.

   (c) En ce qui concerne le tracé : certains candidats ne tracent qu'une seule des deux courbes ; certains ne répondent pas à la question posée, qui est de tracer le graphe sur $[0,1]$ (on trouve des graphes sur $[-1,1]$) ; le papier millimétré n'est pas toujours utilisé (graphe sur la copie, calculs sur la feuille de papier millimétré) ; l'échelle n'est pas toujours respectée ; d'autres omettent la légende, on ne sait pas laquelle des deux courbe est le graphe de f_1 ; certains tracés sont complètement erronés (valeur -1 pour chacune des deux fonctions en zéro) ; les concavités sont parfois très fantaisistes. A côté, certaines copies avaient des graphes très soignés. L'usage de couleurs a été apprécié.

3. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Peu de candidats néanmoins insistent sur le fait que les fonctions sont dérivables comme somme, composées de fonctions dérivables.

   (b) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Toutefois, l'étude du signe de chacune des dérivées manque, souvent, de justifications : étudier les variations des fonctions ne consiste pas à simplement donner un tableau de variations. Celui-ci n'est pas toujours donné, les candidats se contentant d'écrire : « la fonction est croissante ». Nous rappelons que faire un tableau de variations facilite, énormément, la lecture, et pour le correcteur, et pour le candidat. Certains candidats oublient de conclure, après avoir bien prouvé que les dérivées sont positives. Un certain nombre de copies contient l'erreur consistant à déterminer les réels x pourlesquels $f_n(x) = 0$, puis en déduire les variations de f_n. Tous les candidats ne lisent pas bien la question, en s'embarquant dans de laborieux équivalents en $+\infty$, alors que seules les variations des fonctions sont demandées.

   (c) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Cependant, certains candidats étudient, inutilement, les limites en $+\infty$.

   (d) Cette question a été traitée par la majorité des candidats.
   Très peu de candidats justifient que le passage à la puissance n (ou $-n$) est valide car la fonction qui, à tout réel positif t, associe t^n, est croissante sur $\mathbb{R}^+$, et que, pour tout réel x de $[0, \sqrt{n}]$: $1 - \dfrac{x^2}{n} \geq 0$.

   A la question « l'inégalité de droite est-elle vraie pour les réels positifs ? », il convient de donner une réponse argumentée. Un simple « oui » ne suffit pas.

   (e) Les limites demandées étaient classiques : moins d'un candidat sur quatre trouve la valeur exacte, parmi les réponses données, on trouve : zéro, 1, $+\infty$. De nombreux candidats composent l'équivalent par l'exponentielle, ce qui n'est pas possible, au lieu de raisonner avec des « o ». Et écrire « de même », sans plus de détails, est insuffisant dans ce contexte pour prouver la deuxième limite.

4. (a) Cette question n'a été traitée que par peu de candidats. Ceux qui l'ont fait passent, en général, par une étude de fonction. Seules les très bonnes copies ont pensé à utiliser la formule du binôme de Newton. La majorité des candidats ayant commencé cette question utilisent des inégalités sans justification. Souvent, ces inégalités reviennent à écrire « $x^2 < \dfrac{x^2}{n}$ ».

(b) Certains candidats se réfèrent aux intégrales de Riemann, et justifient leur réponse en écrivant « car $\frac{1}{2} < 1$ », ce qui est correct, mais tellement évident qu'il serait peut-être mieux de dire, tout simplement, que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann de référence. De nombreux candidats écrivent des égalités ou inégalités avant d'avoir prouvé la convergence des intégrales. Par exemple, plutôt qu'écrire « $\int_0^\infty \varphi(t)\, dt = \int_0^1 \varphi(t)\, dt + \int_1^\infty \varphi(t)\, dt$ », il convient d'écrire « $\int_0^\infty \varphi(t)\, dt$ converge si et seulement si $\int_0^1 \varphi(t)\, dt$ et $\int_1^\infty \varphi(t)\, dt$ convergent ». D'autre part, De nombreux candidats oublient de préciser que les critères de comparaison (par inégalité ou équivalent) nécessitent que les fonctions soient positives au voisinage de $+\infty$. Enfin, nous rappelons aussi qu'une intégrale de la forme $\int_0^1 \varphi(t)\, dt$ converge non pas parce que l'intégrande est continue en 0, mais parce qu'elle l'est sur $[0, 1]$.

(c) Cette question a été traitée par la majorité des candidats.

Partie II

1. Cette question a souvent été traitée de manière approximative : de nombreux candidats se contentent de vérifier la convergence de l'intégrale ; pour l'hypothèse de domination, certains candidats majorent l'intégrande par 1 ou e^t, en affirmant que la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^+$ (ou l'exponentielle) est intégrable sur $\mathbb{R}^+$; enfin, on trouve aussi une faute courante consistant à majorer $e^{-t\,x^2}$ par e^{-x}, e^{-t}, sans se soucier de la position de t par rapport à 1.

2. Cette question a été traitée par la majorité des candidats.

3. (a) Comme en II. 1, cette question a souvent été traitée de manière approximative, avec les mêmes erreurs qu'en II. 1. Un nombre non négligeable de candidats dérive par rapport à la mauvaise variable. On ne peut que les inciter à prendre du recul face à une dérivée trop compliquée à utiliser par la suite. De même, ces candidats ne se posent pas la question de savoir pourquoi on regarde ce qui se passe sur $[a, +\infty[$, et non sur $\mathbb{R}^+$ comme à la question 1.

   (b) En général, les candidats se contentent de dire que cela découle de la question précédente sans plus de précision. Les bonnes copies précisent qu'on peut recouvrir $\mathbb{R}^+$ avec les intervalles $[a, +\infty[$, $a > 0$.

4. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. La positivité de l'intégrale est souvent bien utilisée. En revanche, on trouve dans de nombreuses copies (parfois bonnes) que la limite de h en l'infini est 1, sans aucune justification. De nombreux candidats prouvent la positivité de h en passant à la limite lorsque t tend vers l'infini, sans justifier l'interversion limite-intégrale.

5. Cette question n'a été traitée que par un petit nombre de candidats. Cette question dépend beaucoup de la question 3. *a.*, et certains candidats ont perdu beaucoup de temps à cause d'un calcul erroné de la dérivée. La plupart d'entre eux n'ont pas pensé à faire un changement de variable dans l'intégrale représentant $h'(t) - h(t)$. Certains candidats se contentent de donner un résultat sans aucune justification.

6. (a) Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Toutefois, certains candidats donnent les solutions $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto A\,e^{-t}$, $A \in \mathbb{R}$, ou omettent la constante A. Quelques candidats donnent $\frac{\pi}{2}$ comme constante.

   (b) La question était posée de manière très claire, pourtant, certains candidats ont cherché, en vain, une primitive à l'aide des fonctions usuelles. De nombreux candidats gardent t comme borne et comme variable d'intégration.

   (c) Les bonnes copies utilisent la méthode de variation de la constante, ou montrent que la fonction h est une solution particulière. Cette dernière méthode est également utilisée dans les copies moins bonnes, mais la rédaction y est très confuse.

7. (a) Comme en I., certains candidats se réfèrent aux intégrales de Riemann, et justifient leur réponse en écrivant « car $\frac{1}{2} < 1$ », ce qui est correct, mais tellement évident qu'il serait peut-être mieux de dire, tout simplement, que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann de référence. D'autre part, nous rappelons que ce n'est pas parce que deux intégrales sont de même nature, qu'elles sont égales. On trouve, aussi, dans de nombreuses copies, une étude en l'infini de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$, ce qui n'a pas d'intérêt ici. Enfin, si le changement de variable est correctement effectué, le caractère C^1 bijectif du changement de variables est souvent absent de la rédaction. Nous rappelons également que $\sqrt{x^2} = |x|$ et vaut x si et seulement si x est positif.

   (b) Cette question n'a été traitée correctement que par peu des candidats, il fallait justifier que l'on prenne $t_0 = 0$, ou que l'on utilise la relation de Chasles, ce qui n'a en général pas été fait du tout (le remplacement de t_0 par 0 étant fait sans aucune justification).

8. Cette question a été traitée par la majorité des candidats, par contre, la justification $e^{-t} > 0$ n'est pas toujours présente. Certains candidats justifient en disant que

l'exponentielle est croissante, d'autres disent les deux ...

9. Cette question a été traitée par la majorité des candidats. Toutefois, certains donnent des valeurs fantaisistes, en contradiction complète avec ce qu'ils ont écrit auparavant.

Partie III

1. Cette question a donné lieu à pas mal d'erreurs : de nombreuses majorations sont fausses ou non justifiées ; la règle de d'Alembert est parfois utilisée incorrectement (de nombreux candidats ne prennent pas la valeur absolue du quotient) ; certains candidats semblant penser que le quotient de deux termes consécutifs doit être inférieur à 1 pour que la série converge. D'autre part, certains candidats confondent série numérique et série entière.

2. Il fallait, ici, absolument donner la valeur du rayon de convergence de la série entière, ce qui n'a pas toujours été le cas : le développement en série entière de l'exponentielle est connu, mais le domaine où il est valable est souvent omis ou faux.

3. Très peu de candidats ont correctement justifié l'intégration terme à terme de la série entière. Et étant donné que la formule à trouver est donnée dans la question, il convient de détailler le raisonnement. En particulier une primitive de la fonction qui, à tout réel positif t, associe t^{2n}, doit être donnée.

4. (a) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats. De nombreux candidats veulent choisir un entier n tel que $\dfrac{1}{(n+1)\,!(2n+3)} = \varepsilon$, au lieu de $\dfrac{1}{(n+1)\,!(2n+3)} \leq \varepsilon$, ce qui semble difficile à réaliser. Dans les bonnes copies seulement on trouve une méthode clairement exposée (sinon, c'est en général une suite de calculs sur les restes d'une série convergente, sans lien direct avec la question).

   (b) Cette question a été traitée par une grande partie des candidats. Quelques candidats poussent le développement trop loin.