Rapport sur l'épreuve de Mathématiques B

Le sujet de cette année est constitué de quatre parties totalement indépendantes constituant trois blocs d'égale importance et de difficulté progressive.
Le premier bloc, regroupant les parties I et II porte sur la géométrie analytique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Il s'agit dans la première partie de déterminer la tangente à une courbe de l'espace définie comme intersection de deux surfaces. Dans la seconde partie, on recherche la développée d'une courbe paramétrée du plan à l'aide de l'enveloppe des normales avant de vérifier sur un point particulier que le cercle de courbure est le cercle ≪ le plus proche ≫ de la courbe. Ces deux parties sont des applications directes du cours. Pourtant, elles ont été les moins abordées par les candidats : un candidat sur six a fait l'impasse sur la partie I (sauf 1 (a)) et autant sur la partie II, on passe à un candidat sur quatre sur les questions II 1 (normales et enveloppe des normales).
Le deuxième bloc, constitué de la partie III, est un exercice de géométrie ≪ pure ≫, davantage centré sur le programme de première année. Presque tous les candidats ont plus ou moins abordé cette partie avec plus ou moins de réussite.
Le dernier bloc, constitué de la quatrième partie, est un exercice d'algèbre linéaire. Il s'agit d'étudier un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ non diagonalisable dont le carré était diagonalisable sans avoir recours à une matrice.

Les résultats sont très contrastés. Si on rencontre peu de copies vides, on trouve par contre un nombre non négligeable de copies où seules une ou deux questions ont été traitées avec succès (en général I 1 et III 1 b). On trouve également de très bons candidats ayant traité avec succès la quasi-totalité du sujet. Les questions de cours ou d'application directe du cours sont trop souvent négligées. Les correcteurs ne peuvent que conseiller aux futurs candidats d'apprendre et de maîtriser leur cours.

La présentation des copies s'est nettement dégradée cette année. Si heureusement, on compte très peu de copies qui ressemblent à des torchons, par contre, moins d'un candidat sur deux $\boxed{\text{encadre}}$ les résultats de ses démonstrations, comme cela est demandé par l'énoncé... Pour cela, l'usage d'une règle est indispensable et il est conseillé d'utiliser une couleur différente de la couleur d'écriture. Comme l'an dernier, l'orthographe de certaines copies laisse à désirer. Il serait souhaitable que les noms propres (Pythagore et Chasles) soient écrits avec des majuscules et que des mots d'usage courant en mathématiques et dont la plupart figure dans l'énoncé soient correctement orthographiés et tout particulièrement : mathématiques, tangent(e), degré, développée et enveloppe, coordonnée(s), gradient ...

Côté rédaction, il est indispensable que les candidats définissent leurs notations : des fonctions dans la partie I, des vecteurs et droites dans la partie II, des points dans la partie III, des sous-espaces propres dans la partie IV... et qu'ils utilisent de préférence des noms non utilisés dans la suite de l'exercice et explicites : par exemple : P, Q, P_1 pour des polynômes plutôt que A ou x ; X et P' étant à exclure. Ils doivent également respecter les

notations de l'énoncé : par exemple, le point de la courbe Γ de paramètre t se note M_t et non $M(t)$ ou $A(t)$, et le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la partie III se note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et non $< \vec{u}, \vec{v} >$ ou encore moins $\vec{u} \times \vec{v}$.
Comme l'an dernier, les candidats sont invités à utiliser le théorème de Pythagore et la relation de Chasles et pas simplement Pythagore et Chasles. Ils éviteront également les abréviations et le style télégraphique.
On constate également de nombreuses confusion de vocabulaire et/ou de notions : Image et invariant(s), parallèles et colinéaires, diagonale et diamètre, cercle et disque, milieu et centre, bissectrice, médiatrice et médiane, degré, dimension et rang ... Par ailleurs de nombreux candidats ne semblent pas faire la différence entre AB (la longueur), $\overrightarrow{AB}$ (le vecteur), $[AB]$ (le segment) et (AB) (la droite) ...
De plus, un peu plus d'attention, vis-à-vis de la nature des objets qu'ils manipulent, devrait permettre aux candidats d'éviter de : dériver une surface ou une courbe, faire le produit vectoriel de deux vecteurs du plan, la somme d'un réel et d'un vecteur, d'écrire une équivalence ($\Leftrightarrow$) entre un ensemble ou une équation, qu'un endomorphisme contient un vecteur ou qu'il est non vide, que le centre d'un cercle est une longueur ou un vecteur ou que des ensembles de $\mathbb{R}^2$ sont des sphères, des plans ou ... des paraboloïdes.

Avant de passer au détail question par question, nous rappellons aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre...

Partie I

Question 1 : Presque tous les candidats savent comment faire cette question, même si elle n'est pas toujours bien rédigée.

Question 2 et 3 : Les candidats qui connaissent leur cours font ces deux questions sans problème ... exception faite des erreurs de calculs. Malheureusement, seul un candidat sur deux parvient à trouver le plan tangent et un sur quatre la tangente...
Les candidats peuvent (doivent) vérifier qu'ils n'ont pas fait d'erreur sur le calcul d'un produit vectoriel en s'assurant que le vecteur obtenu est bien orthogonal aux deux vecteurs de départ.
Une équation cartésienne d'un plan (de $\mathbb{R}^3$) est de la forme $ax+by+cz=d$, et inversement $ax+by+cz=d$ représente (dans $\mathbb{R}^3$) un plan même lorsque $c=0$ (et $(a,b) \neq (0,0)$).

Partie II

Questions 1 : Là encore, les candidats qui connaissent leur cours ont fait ces questions sans problème ... exception faite des (nombreuses) erreurs de calculs. Ne pas oublier de dire où est le paramètre t. Attention toutefois à ne pas confondre le rayon de courbure avec le rayon du cercle de courbure.
Les (futurs) candidats doivent faire attention sur la façon dont les questions (b) et (c) sont posées : les mentions ≪ en déduire ≫ et ≪ utiliser ce résultat ≫ imposent d'utiliser l'enveloppe des normales à la courbe pour trouver sa développée et d'utiliser la développée pour trouver le centre et le rayon du cercle de courbure. Attention : le rayon de courbure n'est pas égal à $\lambda(t)$ (pour reprendre la notation la plus utilisée) : le vecteur choisi pour diriger la normale n'est pas unitaire, il faudrait aussi vérifier s'il est convenablement orienté.

On a parfois l'impression que les candidats pensent qu'il n'existe qu'un seul vecteur (ou éventuellement deux en le normant) tangent à une courbe... Si u en est un, λu ($\lambda \neq 0$) en est un autre mais qui n'est pas égal au précédent (sauf si $\lambda = 1$).

Pour la question (b), un certain nombre de candidats ont, semble-t-il, confondu la recherche de la développée avec celle d'une représentation paramétrique de la surface réglée engendrée par les normales.
Manifestement, d'autres candidats savaient faire cette question mais n'y sont pas parvenus parce que les notations de l'exercice ne sont pas celles qu'ils ont dans leur cours : ils n'ont pas su quoi faire de u. Il est gênant pour de futurs ingénieurs de ne pas savoir s'adapter aux notations qui ne sont pas celles auxquelles ils sont habitués.

Question 2 (a) : Un petit dessin (repère où on place le point M_{-1}, le vecteur tangent associé, l'esquisse du cercle) aurait permis à nombre de candidats d'éviter de placer le centre du cercle sur la tangente à la courbe. Si on a bien $r > 0$, par contre, ce n'est pas le cas de $a + 1$, il ne faut donc pas oublier les valeurs absolues.

Question 2 (b) : Les équations de cercles semblent connues. Il faut faire attention à la formulation de la question.

Question 2 (c) : Cette question n'a pas été assez abordée au goût des correcteurs ...
Le développement limité (en 0) de $h \mapsto \dfrac{1}{1-h}$ est bien connu, celui de $h \mapsto \dfrac{1}{(1-h)^2}$ a posé plus de problèmes ... mais presque moins que celui de $h \mapsto (1-h)^2$ ... La formule de Taylor-Young est une méthode efficace pour répondre à cette question.
Deux remarques : quand on pose $t = -1+h$, on n'a pas $x(t) = x(h)$ mais $x(t) = x(-1+h)$ et il ne faut pas développer les termes en $(1+t)^k$.

Question 2 (d) : Cette question n'a d'intérêt que si les questions précédentes ont été correctement traitées ...

Partie III

Il est possible de transformer tout ou partie de cet exercice en un exercice de géométrie analytique. Il suffit d'indiquer soigneusement le repère utilisé ainsi ses caractéristiques (repère qui peut varier d'une question à l'autre). Nombre de candidats l'ont fait, mais on ne sait presque jamais quel est le repère utilisé (on devine juste qu'il a pour origine le point O).
Pour cette partie, les illustrations graphiques sont les bienvenues. Elles ont bien aidé les correcteurs à suivre les démonstrations parfois tortueuses des candidats. Il est dommage que tous les candidats ne le fassent pas et étonnant que certains candidats puissent faire de la géométrie sans aucun dessin. Attention toutefois à ne pas choisir des cas particuliers (droite D passant par le point O).

Question 1 (a) : assez bien réussie. Il ne suffit pas de dire qu'un triangle soit inscrit dans un cercle pour qu'il soit rectangle. De plus, le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires n'est toujours égal au produit de leurs normes.

Question 1 (b) : les réponses sont souvent justes quoique pas toujours justifiées.

Question 1 (c) : il s'agit d'une question de cours pour (i) et le théorème de Pythagore règle la question (ii) en deux lignes.

Question 2 (a) : cette question a fait l'objet de nombreux « passages en force ». Les correcteurs lisent la totalité des copies, il est donc inutile, voire dangereux, d'essayer de leur faire croire que l'on a fait la question alors que l'on a escamoté les termes qui gênaient ou quelques étapes que l'on ne sait pas faire ...

Question 2 (b) : (i) souvent bien faite.
(ii) la longueur ΩI_0 ne suffit pas à positionner le point I_0.
(iii) Beaucoup ont identifié une droite et même la droite passant par I_0 et orthogonale à (OO') sans se rendre compte qu'ils n'avaient qu'une inclusion. De rares copies ont étudié la réciproque.

Question 2 (c) : de nombreuses bonnes réponses ... rarement justifiée s... et régulièrement en contradiction avec la question précédente.

Question 2 (d) : il est étonnant de trouver des tracés (parfois justes) alors que la question (b) n'a pas été traitée ou des tracés incohérents avec la question (b).
On aurait aimé trouver systématiquement l'application numérique de la question (b) (ii).

Question 3 (a) : rarement traitée, jamais avec succès. Il s'agissait d'établir la réciproque que la question 1.

Question 3 (b) : (i) beaucoup de candidats ont compris qu'on leur demandait une identité de polarisation (même si certains lui donnent un autre nom) ; elle est juste dans un peu plus d'un cas sur deux. (ii) Il y a (au moins) deux façons de calculer $|z|^2$: $(\mathcal{R}e(z))^2+(\mathcal{I}m(z))^2$ choisie par la grande majorité des candidats, et $(z\overline{z})$ qui était plus efficace ici.

Question 3 (c) : La formulation de cette question, contrairement à la précédente, n'imposant pas de méthode, on peut chercher le centre et le rayon du cercle circonscrit à ABC (qui sont heureusement « raisonnables ») puis vérifier que D est sur ce cercle. Ceux qui ont utilisé le résultat de la question 3 (a), ainsi que l'espéraient les auteurs du sujet, ont souvent oublié de vérifier l'alignement des points.

Partie IV

Cette partie est conçue pour être traitée sans avoir recours aux matrices, mais il est possible de les utiliser pour certaines questions à condition de préciser la base utilisée (on rappelle que tous les espaces vectoriels ne disposent pas d'une base canonique) et de rester en dimension quelconque.
Le théorème du rang a été très souvent malmené dans cette partie (questions 1b, 2b, c, e).

Question 1 (a) : L'inclusion des noyaux (et non pas des « *ker* ») est souvent bien démontrée. Par contre la conséquence sur les valeurs propres est souvent fausse. Les (futurs) candidats peuvent vérifier, en utilisant par exemple, la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ que l'affirmation « les valeurs propres de f^2 sont les carrés de celles de f » est fausse. Il est étonnant de voir de nombreuses fois que « f et f^2 ont les mêmes valeurs propres ».
Comme l'an dernier, on rappelle que $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$ mais que la réciproque est fausse en général.

Question 1 (b) : Cette question a été peu réussie ... un mélange aventureux du théorème du rang et de la formule de Grassmann a souvent transformé, on ne sait comment, des inégalités larges en strictes.

Question 1 (c) : Cette question n'a été que très peu abordée et encore moins réussie. Elle ne nécessite pourtant que la définition du polynôme caractéristique (avec un déterminant) et la propriété $\det(f)\ \det(g) = \det(f \circ g)$ (et non $\det(f\,g)$).
On rappelle que dans $\mathbb{R}$, tous les polynômes ne sont pas scindés. De plus, la question (a) ne donne aucune information quant à la multiplicité des valeurs propres de f^2.

Question 2 (a) : Nombre de candidats n'en démontre que la moitié ... pas toujours la même .. sans même souvent mentionner l'autre moitié.
Pour la linéarité : on conseille aux candidats de la démontrer soigneusement, 3 égalités sont en général suffisantes, à condition de ne pas oublier de préciser dans quel(s) ensemble(s) se trouvent les objets manipulés. Cela est bien plus rentable que des formulations toutes faites qui sont au mieux douteuses (« par linéarité de la somme et du produit » : $P \mapsto P+1$ et $P \mapsto P \times P$ ne sont pas linéaires), au pire complètement fausses (« par linéarité des polynômes »). Il est inutile de démontrer que $f(0) = 0$.
Pour $f(E) \subset E$: C'est ici que $n \geqslant 3$ est utilisé. On a uniquement $\deg(f(P)) \leqslant 3$ ... On rappelle que $\deg(0) = -\infty$, $P \in \mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow \deg(P) \leqslant n$, et que le produit de deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas toujours un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question 2 (b) : « La » méthode d'obtention du noyau est bien connue. Beaucoup arrivent à $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$ et sans doute emportés par leurs habitudes sur les produits scalaires, en déduisent que $P = 0$. On trouve trop souvent « $\ker(f) = 0$ donc $\dim(\ker(f)) = 1$ ».

L'image se limite souvent à $\{P \in E\,;\, \exists\, Q \in E, f(Q) = P\}$. La caractérisation à l'aide des images d'une base est peu utilisée ; elle mène pourtant facilement au résultat.
Attention : l'image et le noyau de f ne contiennent que des polynômes, pas de vecteurs colonnes. On rappelle que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ et on signale que le théorème du rang aurait dû permettre de déceler quelques erreurs.

Question 2 (c) (d) : il s'agit de questions de cours. L'injectivité est mieux maîtrisée que la surjectivité. Il ne suffit pas de dire que f est un endomorphisme pour affirmer « f injective $\Leftrightarrow$ f surjective ». On trouve beaucoup trop souvent : « $f(0) = 0$ donc 0 est valeur propre de f » et « la multiplicité de la valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre ».

Question 2 (e) : Question réussie par presque tous les candidats l'ayant abordée.

Question 2 (f) (g) (h) : ces questions font la synthèse de toutes les questions précédentes. On trouve quelques très bonnes réponses, ce qui prouve qu'il y a, heureusement, des candidats pour lesquels l'algèbre linéaire ne se limite pas à diagonaliser des matrices 3×3.