Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A

L'épreuve portait sur l'étude de projecteurs orthogonaux, dans l'espace, puis dans $\mathbb{R}^n$ en général. Il s'agissait donc essentiellement d'un problème d'algèbre linéaire, mais comportant une petite partie de géométrie (formule de changement de base, étude d'une courbe paramétrée du plan).

Cette épreuve s'est révélée être assez classante, avec quelques (trop peu nombreux) candidats qui ont traité la quasi intégralité du sujet, et d'autres copies beaucoup plus faibles. En particulier, un bon tiers des candidats manipulent ces objets mathématiques sans réellement les maîtriser ni les comprendre. Ainsi, ce qu'ils écrivent ressemble de loin à des maths, mais cela n'a, bien souvent, aucun sens, avec des vecteurs égaux à des scalaires, des vecteurs élevés au carré ou encore des endomorphismes appliqués à des réels. Toutes les copies comportant de telles erreurs ont été lourdement sanctionnées.

Mentionnons les erreurs les plus fréquentes que nous avons rencontrées :

- $\rightsquigarrow$ Il n'y a pas qu'un seul vecteur propre associé à une valeur propre, mais tout un sous-espace vectoriel.

- $\rightsquigarrow$ $\langle x, a\rangle = \langle y, a\rangle$ n'implique pas $x = y$.

- $\rightsquigarrow$ Seuls les endomorphismes orthogonaux (le terme « isométrie » est peut-être plus approprié) vérifient $\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$.

- $\rightsquigarrow$ Les projecteurs orthogonaux ne sont pas des endomorphismes orthogonaux contrairement à ce que leur nom pourrait laisser penser.

Partie I

Cette partie étudiait une projection orthogonale particulière dans $\mathbb{R}^3$ et reprenait, si ce n'est des questions de cours, des propriétés que les candidats avaient certainement déjà vues dans leur cursus.

Les premières questions ont été relativement bien traitées (à part l'expression explicite du projecteur orthogonal).

La détermination des valeurs propres et des vecteurs propres a été plus délicate : bien souvent, des valeurs propres ont été trouvées (et fréquemment les bonnes), mais les candidats ne justifiaient pas qu'il n'y en avait pas d'autres, et très souvent également la valeur propre nulle était ommise. Regrettons que de nombreux candidats ne connaissent pas d'autre méthode pour obtenir les valeurs propres que de calculer la matrice associée et de dérouler la « méthode usuelle », alors que les questions précédentes permettaient de répondre à cette question en quelques lignes. Nous rappelons que ce concours a pour but de recruter de futurs ingénieurs capables d'utiliser à bon escient les outils théoriques à leur disposition et non des singes savants qui appliquent des recettes sans les comprendre.

Les conditions suffisantes, ou nécessaires et suffisantes de diagonalisibilité sont en général bien connues. Cependant beaucoup de candidats parlent de multiplicité des valeurs propres, alors qu'ils n'ont pas calculé le polynôme caractéristique.

Partie II

Le but de cette partie était de trouver la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers une autre base orthonormée adaptée à la projection orthogonale sur un plan, puis de l'utiliser pour obtenir une expression simple qui servira dans la partie suivante des coordonnées de la projection orthogonales d'un vecteur.

Cette partie a été plutôt bien traitée et semble être maîtrisée par beaucoup de candidats.

Partie III

Nous étudions dans cette partie la courbe obtenue par projection orthogonale d'une hélice circulaire. Il s'agissait donc de l'étude d'une courbe paramétrée du plan.

La plupart des candidats savent ce qu'est un point régulier et étudient sans problème les variations des fonctions. En revanche, la réduction de l'intervalle d'étude a posé de nombreux problèmes (certains candidats ne regardent que la parité des fonctions, ou encore la fonction $t \mapsto 2t - \cos t$ devient subitement périodique !) et les symétries/translations sont rarement bien décrites.

Précisons également que tracer une courbe ne se réduit pas à calculer quelques points particuliers et à les relier par une courbe plus ou moins lisse. Au moins, quelques tangentes sont attendues pour pouvoir obtenur une allure raisonnable de la courbe. Au final, nous n'avons vu que très peu de courbes ressemblant à celle attendue.

Partie IV

Cette dernière partie, plus théorique, donnaient des caractérisations des projecteurs orthogonaux, i.e. les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs contractants et les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs auto-adjoints.

La première question de cette partie a clairement montré une totale incapacité de beaucoup des candidats à manipuler des inégalités, avec des raisonnements du style $x \geq y$, $x \geq 0$ alors $y \geq 0$. A moins que tous les coups soient bons pour arriver au résultat demandé... Cette remarque est également valable pour l'inégalité demandée à la question 3.

Démontrer qu'une application est un endomorphisme ne pose en général aucun problème, et la démonstration que pour un projecteur, l'image et le noyau sont en somme directe est également assez bien traitée.

En revanche, la manipulation des sommes et des produits scalaires dans la question 4 a là encore montré un manque flagrant de compréhension des objets manipulés.

La fin du problème a été traitée par trop peu de candidats pour permettre des remarques significatives.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques B

Nous avons les remarques générales suivantes :

1. Une majorité de candidats ne semble pas comprendre la différence entre l'équation d'une courbe, et son paramétrage.

2. Le niveau d'un tiers des candidats en algèbre linéaire est très faible (nombreux sont les candidats n'ayant même pas abordé la partie d'algèbre). Les espaces vectoriels sont assimilés à des ensembles, la différence entre un espace et sa dimension n'est pas perçue.

3. Dans de nombreuses copies (de 30 à 50 %), les résultats ne sont pas encadrés, alors que cela est demandé sur l'énoncé, sans parler de ceux que le font mais à main levée, et peu proprement. Nous rappelons que cela facilite non seulement la tâche du correcteur mais, aussi, aide le candidat à retrouver facilement ses propres résultats.

4. On rencontre quelques copies à l'orthographe déplorable. Au palmarès des mots mal orthographiés, et pourtant fréquemment utilisés en mathématiques : tangente, aire, mathématiques, horizontale, intervalle, degré, projeté, parabole, ... ce qui est d'autant moins acceptable que la plupart d'entre eux figurent dans l'énoncé. Signalons également que Pythagore, comme tous les noms propres, s'écrit avec une majuscule. Enfin, nombreux sont ceux qui utilisent ≪ Pythagore ≫ au lieu du ≪ théorème de Pythagore ≫.

Remarques particulières

Partie I

1. **Étude de Γ_A dans le cas où $a = b = 9$.**
   (a) En général, cette question est bien réussie, même si on ne sait pas où est « t ». De nombreux candidats ont eu la bonne idée d'illustrer cette question par un schéma.

   (b) Cette question a aussi été bien réussie. Quelques candidats oublient le coefficient dominant lorsqu'ils factorisent $x'(t)$ et $y'(t)$. D'autres oublient la seconde partie de la question. La tangente au point de paramètre zéro n'est pas toujours bien précisée.
   Pour trouver les racines d'un polynôme de degré deux ayant une racine évident, le passage au discriminant est systématique. Certaines racines de 144 sont restées en l'état.

   (c) Certains candidats pensent que tout point de l'intersection de la courbe avec son axe de symétrie est un point double ; d'autres, que les points doubles sont nécessairement sur l'axe. La résolution du système est souvent mal rédigée (surtout les équivalences). Comme précédemment, des candidats oublient la seconde partie de la question.

   (d) La notion de branche parabolique est mal connue et, lorsque le résultat est établi, la traduction graphique nest pas maîtrisée. Les calculs sont en général corrects, mais leur traduction hasardeuse.

   (e) Le tracé de la courbe Γ_A ne correspond pas toujours à une traduction correcte des calculs précédents ... Nombreux sont les candidats qui ont mal choisi l'unité et/ou la position de l'origine du repère, ce qui ne leur permet pas de tracer les branches infinies. On trouve quelques copies où le repère n'est pas orthonormé et/ou il n'y a aucune indication d'unité.

2. Très peu de candidats ont obtenu le résultat concernant l'aire de la boucle formée par Γ_A. Beaucoup de copies donnent un résultat non simplifié.

   Quelques candidats trouvent une aire négative ou nulle sans que cela semble les troubler. On trouve inversement des vérifications de la valeur trouvée par le calcul de l'aire d'un rectangle contenant la boucle.

   Parmi les mauvaises formules, on trouve celles donnant le calcul de la longueur.

3. Cette question a rarement été abordée. Parmi les candidats connaissant la formule, un certain nombre ont voulu exploiter la symétrie du domaine, mais ont :

   - $\diamond$ oublié de considérer la circulation sur le segment $[M(0)M(\pm 3)]$;
   - $\diamond$ ou utilisé $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{3} f(t)\,dt$.

   (a) Cette question a davantage été traitée que la précédente. De nombreux candidats s'arrêtent à une représentation paramétrique. Certains le disent et cherchent l'équation dans *b.* mais d'autres pensent qu'il s'agit de l'équation.

   (b) Cette question a rarement été faite. Pour la nature : ceux qui utilisent des outils de première année (rotation du repère) n'arrivent pas à le traduire sur le dessin (axe focal mal placé). Ceux qui utilisent les outils de seconde année s'en sortent mieux, même si certains oublient de normer les vecteurs propres. Les éléments caractéristiques se limitent souvent au paramètre et au sommet (qui devient d'ailleurs « centre » dans de nombreux cas).

Partie II

C'est la partie la mieux réussie, qui a contribué à sauver de nombreuses copies, et leur permettre d'atteindre une note correcte. Il y même de rares candidats n'ayant traité que cette partie. Presque tous font le tracé du triangle mais, dans un cas sur deux, le triangle est mal orienté. On rencontre quelques angles obtus (souvent en A ou C, mais aussi parfois en B).

1. Tous les candidats ont donné la bonne réponse, MAIS seul un sur deux précise le triangle rectangle considéré et nombreux sont ceux qui ne précisent pas la position de l'angle droit.

2. On trouve quelques réponses qui donnent $a \times h$, $\dfrac{a \times h}{3}$, ou encore $\dfrac{a \times h^2}{2}$ mais, au final, 97 % de réponses correctes.

3. A quelques exceptions près, les réponses sont cohérentes avec les précédentes.

4. Cette question a été bien réussie (on trouve trois méthodes différentes plus ou moins efficaces).

5. La norme du produit vectoriel est souvent bien calculée (même s'il semble y avoir une part de chance). Pour le déterminant, bien peu ont remarqué que la base du plan proposée était indirecte, les rares qui ont eu un résultat négatif ont cru à une erreur. Beaucoup se souviennent qu'il y a un lien entre le déterminant et une aire mais presque tous oublient les valeurs absolues. Certains candidats souhaitent utiliser des

coordonnées mais quasiment aucun ne précise le repère orthonormé direct utilisé. On trouve des déterminants de deux vecteurs à trois coordonnées et des produits vectoriels de deux vecteurs à deux coordonnées.

6. L'identité de polarisation a été utilisée assez souvent. On trouve souvent des variantes plus ou moins cachées et/ou compliquées de la démonstration de la question suivante.
   Il est à noter que l'utilisation des résultats du programme de seconde année et non de première année permettait d'obtenir la réponse la plus efficace.

7. Cette question a été assez bien réussie (avec plus ou moins d'efficacité).

Partie III

Cette partie n'est pas abordée par 10 % des candidats. Beaucoup de candidats n'obtiennent aucun point dans cette partie. Le théorème du rang, peu souvent utilisé, est fréquemment confondu avec la formule de Grassmann, ou, encore, avec une décomposition de la forme « $E = \mathcal{I}mf + \ker f$ ». De nombreux candidats semblent penser que ce théorème ne s'applique qu'à des endomorphismes. Les hypothèses sont rarement rappelées (de très nombreuses copies se contentent de dire que le théorème s'applique car f est un endomorphisme).

1. (a) Il y a eu très de bonnes réponses à cette question.

   (b) Cette question est encore moins bien réussie que la précédente.

   (c) De nombreux candidats font le lien avec le *b.*, mais beaucoup pensent que « $\dim F = \dim G$ » équivaut à « $F = G$ ».

   (d) Les candidats sont moins nombreux à faire le lien avec le *a.* (la question semble trop loin pour être utilisée ...) La somme directe $E = F \oplus G$ se limite parfois à $F \cap G = \{0\}$ (ou « 0 », ou « $\emptyset$ », ou « $\{\emptyset\}$ »). Régulièrement, on rencontre des copies où seule une implication est démontrée.

2. De nombreux candidats écrivent, sans justification, que « $f(x) = y$ » équivaut à « $f^2(x) = f(y)$ ».

   (a) Cette question semble la mieux réussie de la partie III. La notion d'image apparaît comme correctement maîtrisée.

   (b) Les réponses, en général, manquent d'efficacité (une fois sur deux, le candidat n'utilise pas le résultat précédent).

(c) On trouve souvent ≪ $A \subset B$ et $A \cap C = \{0\}$ donc $B \cap C = \{0\}$ ≫.

(d) L'appartenance $f(x) \in \mathcal{I}m\ (f - Id_E)$ est assez bien traitée. Peu de candidats réussissent à montrer que la famille $(x, f(x))$ est libre.

3. (a) Il y a peu de bonnes réponses Quelques copies n'étaient pas loin d'arriver au résultat.

(b) De même que précédemment, il y a peu de bonnes réponses, et quelques copies qui n'étaient pas loin d'arriver au résultat (ce ne sont pas forcémment les mêmes qu'en a). Certains candidats font appel aux valeurs propres complexes de f. Comme dim ker $(f - Id_E) = 1$, peu envisagent la possibilité que 1 soit valeur propre triple (ou double).

(c) L'exemple proposé vérifie toujours dim ker $(f - Id_E) = 1$ mais pas, dans un cas sur deux, $f^3 = Id_E$. Il est à noter que l'utilisation des résultats du programme de seconde année et non de première année permettait d'obtenir la réponse la plus efficace.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Nous avons les remarques suivantes :

1. Au début du sujet, se trouvaient de nombreuses questions très simples. Une minorité de candidats traite correctement ces questions.

2. Plus de la moitié des candidats ne semblent pas maîtriser la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre un, avec second membre.

3. Les $\ll$ démonstrations graphiques $\gg$ où le candidat $\ll$ voit sur le dessin que cela marche $\gg$ ne peuvent donner lieu à comptabilisation de points.

4. Comme l'an dernier, nous avons trouvé un nombre élevé de copies $\ll$ vides $\gg$, où le candidat se contente de mettre (très proprement en général) les numéros des questions avec, à côté, des blancs. Ces candidats ayant fait l'effort de venir passer l'épreuve, nous ne leur avons pas mis la note $\ll$ zéro $\gg$. Nous avons aussi trouvé un nombre élevé de copies où tout ce qui est traité est faux. Là encore, ces candidats ayant fait l'effort de rendre une copie, nous ne leur avons pas mis la note $\ll$ zéro $\gg$.

Remarques particulières

Partie I

1. (a) Cette question n'a pas toujours été très correctement traitée. Certains candidats donnent le résultat sans aucune justification. D'autres tentent de faire un changement d'indices, mais on trouve beaucoup d'aberrations ou de choses fausses ($\ll \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{(k-1)\,!} \gg$ ou $\ll \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k - k\,t^{k-1}}{k\,!} \gg$).

   (b) La plupart des candidats donnent correctement la solution générale de l'équation sans second membre $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$. Par contre, un nombre non négligeable écrit que $\ll$ la solution générale est e^t $\gg$.

(c) Très peu de candidats arrivent à résoudre $\mathcal{E}$. On trouve beaucoup de réponses avec des intégrales sans aucune borne, des intégrales sur $\mathbb{R}$, ou encore des intégrales de 0 à $+\infty$. D'autre part, beaucoup de candidats utilisent t comme variable pour R_n, mais aussi comme variable d'intégration, et simplifient abusivement le terme en e^t.

(d) Très peu de candidats remarquent que $R_n(0) = 0$, et donc très peu répondent correctement à cette question.

(e) Cette question n'est traitée correctement que par très peu de candidats.

(f) Très peu de candidats donnent une réponse correcte. On trouve beaucoup de réponses fantaisistes, qui donnent, comme rayon de convergence, « 1 », « $\mathbb{R}$ », « $-\infty$ ». En outre, beaucoup de candidats écrivent une égalité entre e^t et le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k\,!}$.

2. (a) Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats. On trouve cependant un nombre non négligeable de réponses inquiétantes où les candidats écrivent que « $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{(n+1)!}$ », et simplifient de même le rapport $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Dans d'autres copies, les candidats ne semblent pas faire de différence entre $\dfrac{1}{(n+1)!}$ et $\dfrac{1}{n+1}$.
Le calcul est, globalement, souvent mal fait pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec une conclusion hâtive (les candidats ayant compris qu'elle était décroissante).

(b) Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats. La notion de suite adjacente semble maîtrisée par l'ensemble des candidats (cette remarque vaut aussi pour les copies très faibles, qui ont gagné des points à cette question). Toutefois, certains n'hésitent pas à dire que les suites sont adjacentes alors même qu'ils ont conclu qu'elles étaient de même monotonie.

(c) Cette question n'a pas toujours été correctement traitée, beaucoup de candidats se contentent d'écrire le résultat sans aucune justification. Un nombre non négligeable de candidats n'ont pas compris ce qu'était e, on trouve, dans les copies : « il existe e tel que ... »

(d) Cette question n'a été correctement traitée que par un faible nombre de candidats.

Il est dommage de voir que certains candidats semblaient comprendre pourquoi un tel encadrement ne pouvait être possible, mais n'arrivaient pas à l'exprimer clairement. En revanche, beaucoup de candidats ont essayé de « tromper » le correcteur en utilisant des arguments farfelus pour pouvoir conclure.

(e) *i.* Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats. Toutefois, un nombre non négligeable de candidats confond ≪ il existe ≫ avec ≪ quelque soit ≫.

ii. Cette question n'a été correctement traitée que par un faible nombre de candidats.

iii. Cette question n'a pas toujours été correctement traitée.

3. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.

Partie II

1. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats. Toutefois, certains candidats ne connaissent pas la limite lorsque x tend vers zéro par valeurs supérieures de l'expression $x \ln x$. De plus, beaucoup ne justifient pas la continuité et la dérivabilité, certains confondent ces deux notions.

2. Cette question n'a pas toujours été correctement traitée. Beaucoup de candidats donnent zéro comme réponse, ou bien donnent une valeur négative.

3. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée. Beaucoup de candidats affirment que ≪ $t_0 < t_1$ car ils sont dans le même intervalle ≫.

4. Très peu de candidats connaissent l'inégalité de Taylor-Lagrange. Nous avons trouvé beaucoup de réponses très fantaisistes. En outre, une grande proportion de candidats ne semble pas savoir que la dérivée $k^{ième}$ d'une fonction, pour $k \in \mathbb{N}$, se note $f^{(k)}$ et non f^k.

5. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée.

6. Cette question a rarement été correctement traitée. En outre, le 2^n est fréquemment confondu avec $2\,n$.

7. Cette question n'a pas souvent été correctement traitée. Mais il est inquiétant de lire plusieurs candidats écrire : ≪ la suite est croissante et majorée par e^{-1} DONC converge vers e^{-1} ≫.

8. (a) Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats. Toutefois, certains candidats ne semblent pas faire la différence entre la continuité et le prolongement par continuité.

(b) Cette question n'a pas souvent été correctement traitée.

(c) Cette question a rarement été correctement traitée.

(d) *i.* Cette question a très rarement été correctement traitée. Un nombre non négligeable de candidats écrit que, ≪ au voisinage de zéro, $x^p \ln^q x$ est équivalent à x^p ≫, ou, encore, que $x^p \ln^q x \leq x^p$ ≫.

ii. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.

iii. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.

(e) Cette question a rarement été correctement traitée.

Partie III

1. Très peu de candidats énoncent de façon correcte le résultat permettant l'approximation de l'intégrale d'une fonction φ continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ par les sommes de Riemann. Un nombre non négligeable de candidats confond l'expression dépendant de l'entier n, et sa limite. Enfin, beaucoup de candidats ne semblent connaître le résultat que dans le cas où $a = 0$ et $b = 1$.

2. Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats.

3. Cette question a très rarement été correctement traitée.