

◆

EPREUVE DE MATHEMATIQUES A

◆

I. REMARQUES GENERALES

Le problème se composait de 4 parties largement indépendantes et consistait en l'étude d'applications linéaires définies sur l'espace des matrices. Ce dernier point (espace d'étude différent du cadre habituel \mathbb{R}^n) n'a pas posé de problème majeur tant que l'on se restreignait à des exemples, mais peu de candidats s'avèrent capables de conduire un raisonnement dans un cadre abstrait jusqu'à son terme. Bien souvent, les candidats manipulent des « lettres » de façon purement formelle et oublient la nature des objets représentés par celles-ci. Un moment de réflexion sur la nature de ces objets permettrait d'éviter un certain nombre d'erreurs grossières que les candidats ne font pas sur les exemples numériques où les objets sont clairement identifiés.

Nous conseillons aussi aux candidats de lire attentivement le préambule du sujet introduisant les notations. Ainsi, dans ce sujet, $M_n(\mathbb{R})^*$ ne désignait pas l'ensemble des matrices privé de la matrice nulle, mais l'espace des formes linéaires sur ces matrices. Enfin, des points de rédaction ont été ajoutés au barème; ces points prenaient en compte en partie la lisibilité de la copie mais surtout récompensaient la clarté et la rigueur des raisonnements. Nous insistons sur l'importance de ce dernier point qui départage vraiment les candidats.

II. REMARQUES PARTICULIERES

La partie préliminaire comportait, en majeure partie, des questions de cours, et peu de justifications étaient demandées. Vérifier que les applications définies ici sont linéaires a été traité correctement par presque tous les candidats, la dimension des espaces vectoriels a posé beaucoup plus de problèmes notamment à cause des erreurs sur les notations évoquées plus haut (rappelons tout de même qu'un espace vectoriel privé de son élément nul n'est plus un espace vectoriel et donc que la notion de dimension n'a aucun sens). Il semble également que beaucoup de candidats confondent dimension et cardinal. Enfin, il est totalement scandaleux que seulement un tiers des candidats soit en mesure d'énoncer (fort heureusement, la démonstration n'a pas été demandée) un théorème du cours ! Si le cours n'est pas maîtrisé, comment peut-on espérer résoudre des problèmes complexes ?

La première partie consistait à étudier les applications linéaires du sujet pour un exemple simple. Cette partie a été en général bien réussie. Regrettons seulement que, bien que les théorèmes de diagonalisation soient connus, leur application dans des cas simples donne parfois lieu à des arguments peu rigoureux, voire fantaisistes : ainsi il n'est pas rare de voir que, puisque le déterminant n'est pas nul, la matrice est diagonalisable (!!!) pour la première question, puis de trouver l'argument complet sur les dimensions des sous-espaces vectoriels dans la seconde.

La seconde partie étudiait la réduction de l'endomorphisme étudié dans un cas particulier dans la partie précédente. Bien qu'il fût spécifiquement mentionné au début de la partie que l'on prenait une matrice A dans un espace général à n dimensions, beaucoup de candidats ont continué à utiliser la matrice 2×2 de la première partie ! Cette partie a posé d'énormes problèmes aux candidats. Tout d'abord, le principal argument du début a été la simplification par une matrice ! Il faut dire que les précautions pour simplifier une égalité sur les réels ne sont déjà pas prises en compte (discussion sur la nullité), une telle discussion sur l'inversibilité des matrices semble dépasser la plupart des candidats. Le début des problèmes sur les notations a également commencé ici où il y a eu énormément de confusion entre $AM = a.M$ où M est une matrice carrée et $AX = a.X$ où X est un vecteur (et donc un vecteur propre de A).

La troisième partie traitait d'un théorème de factorisation général pour les applications linéaires lorsqu'il y a inclusion des noyaux. L'implication directe (la factorisation implique l'inclusion des noyaux) a en général été bien traitée, même si des équivalences sont souvent utilisées à mauvais escient (que de problèmes de raisonnement !). Le théorème du rang est également bien énoncé ici, mais il n'implique **jamais** que le noyau et l'image d'une application linéaire sont en somme directe, surtout quand ces ensembles n'appartiennent pas au même espace ! Enfin, calculer des noyaux d'applications linéaires est quelque chose de courant pour ces candidats; pourquoi trouve-t-on alors « $u(x) = 0$ donc $x = 0$ car u est linéaire » dans ce cadre abstrait ?

La dernière partie utilisait les résultats (que l'on pouvait aisément admettre) des parties précédentes afin d'obtenir une caractérisation des matrices nilpotentes. Même si le cadre restait général, on revenait à des questions plus calculatoires, et cette partie a été en conséquence mieux réussie que les deux précédentes. Beaucoup trop de candidats ont néanmoins multiplié (ou pris des puissances) des vecteurs. La formule générale du produit matriciel a été souvent énoncée correctement, ce qui est un net progrès par rapport aux années précédentes.

III. CONCLUSION

Globalement, cette épreuve a permis d'assurer une bonne sélection des candidats, dont un nombre significatif obtient des résultats parfaitement honorables. De plus, les correcteurs ont eu la satisfaction de corriger un nombre satisfaisant de bonnes, voire d'excellentes copies.

Nous rappelons aux futurs candidats les conseils suivants :

1. Une bonne connaissance de la terminologie et des théorèmes de cours est indispensable.
2. L'utilisation d'un théorème nécessite le rappel de celui-ci ainsi que la vérification de ses hypothèses.
3. La rédaction doit être à la fois précise et concise, proportionnée à la difficulté des questions, en insistant sur les points clés. Les raisonnements trop longs et incompréhensibles doivent être bannis.
Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.
4. La présentation matérielle ne doit pas être négligée.
5. La qualité du français et de l'orthographe est à surveiller. Il s'agit là d'un point très important dans la vie professionnelle d'un ingénieur, appelé à rédiger des rapports scientifiques et techniques.
6. Il faut maîtriser les techniques de base du calcul.
7. A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de « court-circuiter » la moindre étape. En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte, d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser les candidats qui ont pris le temps de bien rédiger.
8. Nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer qu'ils en admettent le résultat pour la suite. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle, doivent être bannis.

Les candidats ayant mis en pratique ces conseils ont obtenu des notes bien supérieures à la moyenne.

Nous espérons que ces remarques aideront les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours. La prise en compte de ces conseils tout au long de l'année de préparation leur permettra d'être prêts le jour du concours.