

## Epreuve de Physique A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

---

**L'usage de calculatrices est interdit.**

**Annexe à rendre obligatoirement en fin d'épreuve même si cette dernière n'a pas été complétée.**

### AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

### CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est strictement interdit. Les surveillants et surveillantes se réservent le droit de les confisquer.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session. Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance. La présence d'une information d'identification en dehors du cartouche donnera lieu à un point de pénalité et la page concernée pourra être soustraite de la correction.
- Dans les copies, toutes les questions, y compris celles qui ne sont pas traitées, seront numérotées dans l'ordre croissant. Une question non traitée sera laissée en blanc à la suite de son numéro.
- Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le ou la candidat(e).
- Les résultats numériques exprimés sans unité ou avec une unité fausse ne seront pas comptabilisés.

# Système automatique d'irrigation maraîchère



Crédit photo : Nicolas Le Beuzit (<https://lavoixdumaraicher.fr>)

L'activité maraîchère, c'est-à-dire la production de légumes, est un important secteur d'activité agricole. En France, environ 388000 hectares sont consacrés à la production de 5,5 millions de tonnes de légumes. Le secteur représente en valeur marchande environ 10% de la production agricole française. Avec plus de 200 000 emplois directs, le maraîchage constitue le plus gros pourvoyeur d'emplois agricoles en France.

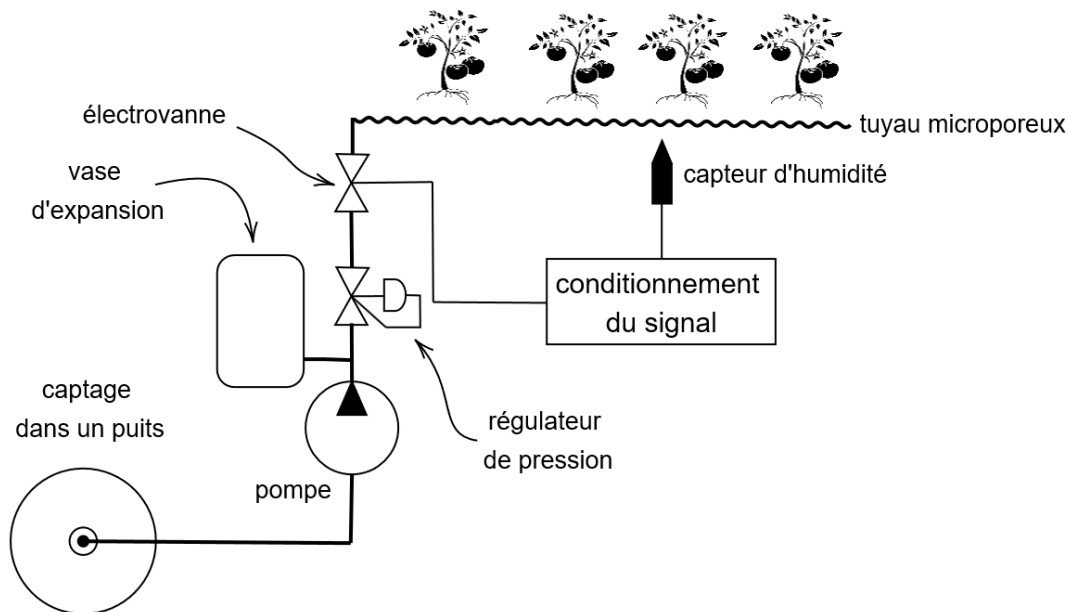


FIGURE 1: Vue d'ensemble du système d'irrigation automatique.

Pour pousser correctement, un légume a besoin d'un apport d'eau régulier. Malheureusement, le dérèglement climatique rend toujours plus probables et sévères les épisodes de sécheresse des sols. Le recours à l'irrigation est par conséquent de plus en plus fréquent afin d'assurer une production suffisante malgré les aléas climatiques. Il en va de la sécurité alimentaire des consommateurs.

Dans le même temps, l'accès à la ressource en eau est de plus en plus source de conflits d'usage. Les maraîchers se retrouvent donc soumis à la double contrainte de devoir irriguer leur culture afin d'assurer de bons rendements tout en préservant le plus possible la ressource. Il convient donc de trouver des solutions afin d'assurer un arrosage de précision, à la fois efficace et économe en eau.

Dans ce problème, le candidat est amené à modéliser un système d'arrosage maraîcher automatique. Une vue d'ensemble du dispositif est proposée Figure 1.

La partie I s'attache d'abord à montrer qu'il est possible de déterminer la composition d'un sol par décantation. La structure du sol étant connue, l'énoncé propose ensuite d'étudier un capteur de mesure en temps réel de l'humidité du sol. Le signal du capteur est converti électroniquement afin de commander une électrovanne qui régule le débit d'eau d'arrosage. Cette eau est distribuée aux plants maraîchers par un tuyau microporeux (partie II) alimenté grâce à une pompe et à un vase d'expansion (partie III). Les trois parties sont totalement indépendantes.

# I Arroser juste quand il faut

## 1 Connaître son sol par décantation fractionnée

Afin de mettre en place la bonne stratégie d'irrigation, le maraîcher doit d'abord connaître la composition de son sol qui est un mélange en proportions variables :

- de matières organiques (débris végétaux en décomposition) ;
- d'argiles (particules de taille inférieure à  $2\ \mu\text{m}$ ) ;
- de limons (particules de taille comprise entre  $2\ \mu\text{m}$  et  $50\ \mu\text{m}$ ) ;
- de sables (particules de taille supérieure à  $50\ \mu\text{m}$ ).

Un sol argileux est réputé pour avoir une bonne capacité de rétention d'eau tandis qu'un sol sableux sera très drainant.

Afin d'estimer grossièrement la composition d'un sol, les jardiniers ont souvent recours au « test du bocal » dont le protocole est défini ainsi :

### Test du bocal

- Prélever un échantillon de terre dans le potager et remplir environ le tiers d'un grand bocal en verre de cette terre.
- Compléter le bocal au trois quart avec de l'eau et refermer-le hermétiquement.
- Agiter le bocal vigoureusement pendant trois minutes afin de former un mélange eau/terre homogène.
- Poser le bocal sur un meuble sans y toucher pendant 72 heures.

Après 72 heures de repos, le bocal ressemble à la figure 2. On peut distinguer des strates de matériaux de différentes granulométrie, les plus gros grains reposant au fond du bocal. En mesurant les épaisseurs respectives de chacune des strates, on peut alors déterminer les proportions de sables, limons et argiles de la terre récoltée. On remarque que la matière organique, de densité inférieure à celle de l'eau, surnage en haut du bocal. Dans la suite de cette partie, nous allons chercher un modèle permettant d'expliquer la stratification du contenu du bocal.

Le bocal est de section  $S$  et de profondeur  $p$ . On note respectivement  $\eta$  et  $\rho_e$  la viscosité dynamique et la masse volumique de l'eau.  $\eta$  et  $\rho_e$  sont supposées constantes.

On définit le repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  lié au bocal. L'axe  $(O_z)$  est vertical descendant. L'interface du mélange terre/eau avec l'air dans le bocal correspond à la cote  $z = 0$ .

On suppose que les particules minérales (sables, limons ou argiles) sont sphériques, de rayon  $r$  (qui dépend de la particule considérée), et qu'elles sont soumises, entre autres, à la force de frottement fluide  $\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$ , où  $\vec{v}$  est la vitesse des particules et à la poussée d'Archimède dont l'énoncé historique peut se formuler ainsi :

« Tout corps plongé dans un fluide au repos subit une force verticale de norme égale et opposée au poids du volume de fluide déplacé. »

**Tournez la page S.V.P.**

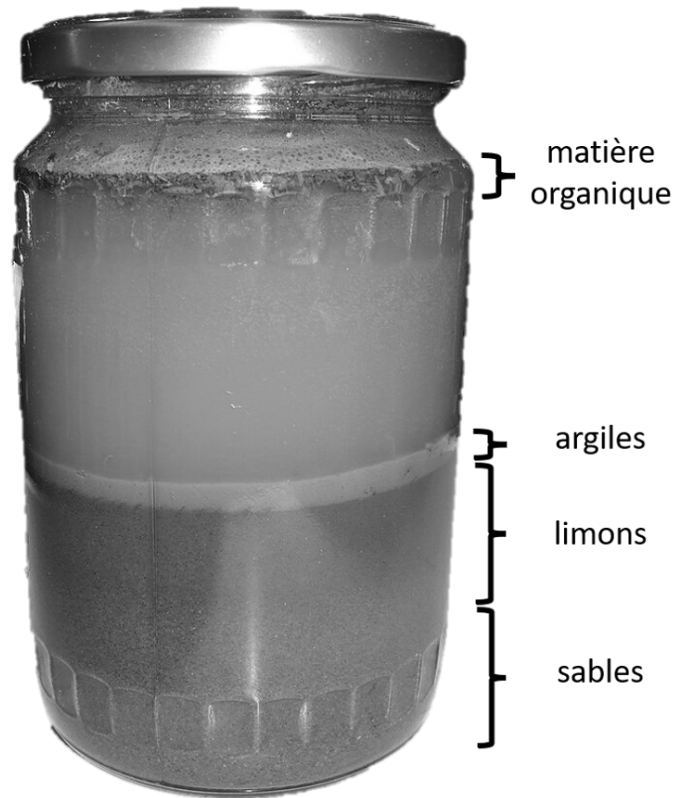


FIGURE 2: Résultat du « test du bocal » après 72 heures de décantation.

On note enfin  $\rho_0$  (avec  $\rho_0 > \rho_e$ ) la masse volumique des particules, supposée constante et identique pour toutes les particules.

1. Donner les expressions des trois forces s'exerçant sur une particule en mouvement durant la décantation.
2. À partir de la seconde loi de Newton, établir l'équation différentielle sur  $v_z$ , projection selon  $\vec{e}_z$  de la vitesse de la particule. Déterminer alors, en fonction de  $\rho_0$ ,  $\rho_e$ ,  $r$ ,  $\eta$  et de l'accélération  $g$  de la pesanteur, la vitesse limite  $\vec{v}_\ell = v_\ell \cdot \vec{e}_z$  atteinte par ces particules. Quel est le signe de  $v_\ell$  ?
3. Introduire un temps caractéristique  $\tau_c$  que l'on exprimera en fonction de  $\rho_0$ ,  $r$  et de  $\eta$  puis donner la solution  $v_z(t)$  de l'équation différentielle en supposant qu'initialement  $v_z(t=0) = 0$ .

On appelle temps de sédimentation noté  $\tau_s$  la durée nécessaire pour qu'une particule initialement à  $z = 0$  se retrouve au fond du bocal, c'est-à-dire en  $z = p$ .

4. Déterminer l'évolution de  $z(t)$  en supposant une particule initialement à la surface  $z(t=0) = 0$  avec une vitesse nulle  $v_z(t=0) = 0$ .
5. Montrer que le temps de sédimentation  $\tau_s$  est à chercher comme solution de l'équation :

$$v_\ell [\tau_s + \tau_c \{ \exp(-\tau_s/\tau_c) - 1 \}] = p$$

On ne cherchera pas à résoudre cette équation.

On donne Figure 3 la représentation graphique, en échelle log-log, de la fonction

$$f : x \rightarrow x - 1 + \exp(-x)$$

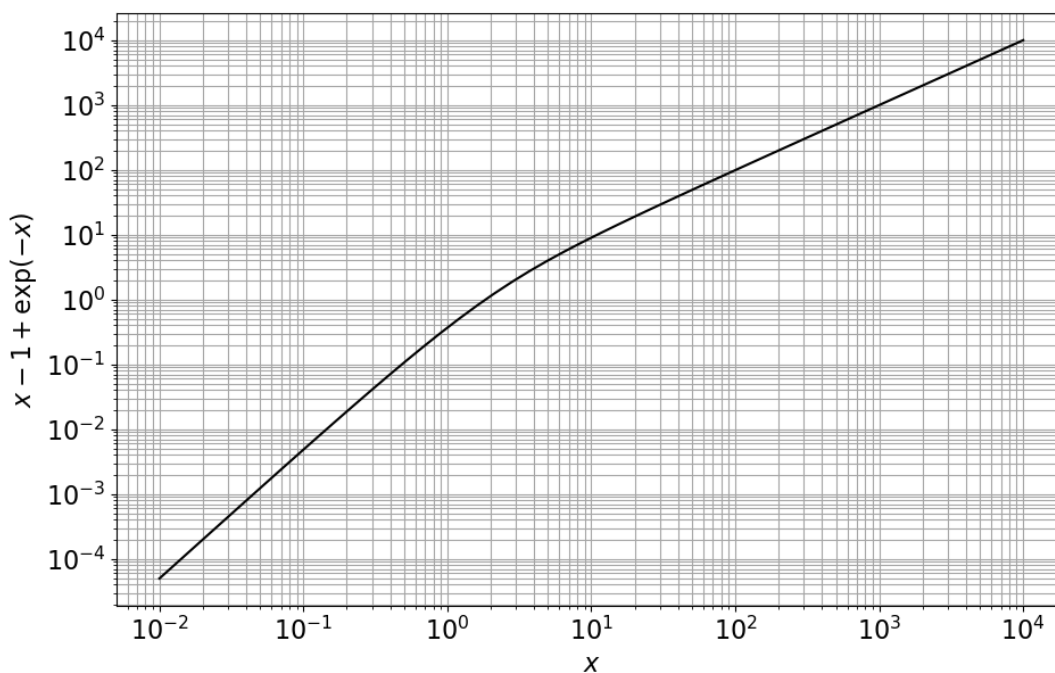


FIGURE 3: Représentation graphique de la fonction  $f$  en échelle log-log.

On récapitule également dans un tableau les valeurs de  $\tau_c$  et du rapport  $p/(v_\ell \tau_c)$  pour trois types de particules :

	argiles ( $r = 1 \mu\text{m}$ )	limons ( $r = 20 \mu\text{m}$ )	sables ( $r = 2 \text{mm}$ )
$\tau_c$ (en s)	$2 \times 10^{-7}$	$9 \times 10^{-5}$	0,9
$p/(v_\ell \tau_c)$	$8 \times 10^{11}$	$5 \times 10^6$	$5 \times 10^{-2}$

6. Déterminer graphiquement la valeur prise par  $\tau_s$  pour les sables  $r = 2 \text{mm}$ . Vous complétez la reproduction de la figure 3 présente en annexe de l'épreuve et vous explicitez avec précision toutes les étapes de votre démarche.

7. Faire une approximation de  $f(x)$  lorsque  $x \gg 1$ . Cela se confirme-t-il sur le graphe de la figure 3 ?

8. En déduire alors les valeurs prises par  $\tau_s$  pour les limons et les argiles.

9. Introduisons  $\epsilon$  la distance parcourue par les argiles durant la durée de sédimentation des sables (c'est-à-dire la durée du dépôt de tous les sables du bocal au fond de celui-ci). En exprimant littéralement puis numériquement le rapport  $\epsilon/p$ , conclure quant à l'efficacité de la sédimentation fractionnée pour obtenir une séparation des différentes particules.

10. Justifier que le protocole indique d'attendre 72 heures avant d'analyser les résultats de la décantation.

## 2 Teneur en eau d'un sol

Afin de déterminer s'il est nécessaire d'effectuer un arrosage des cultures, la connaissance de la teneur en eau  $Hr$  d'un sol est primordiale.  $Hr$  est la masse d'eau en grammes contenue dans un gramme de sol. C'est donc une grandeur adimensionnée. Elle varie typiquement entre  $Hr = 0$  (sol très sec) à  $Hr = 0,40$  (sol saturé en eau).

Cette teneur en eau peut être mesurée par conductimétrie. Considérons une sonde constituée de deux électrodes métalliques parallèles et rectangulaires de surface  $a \times b = 12 \times 10 \text{cm}^2$ . Elles sont

séparées de la distance  $c = 1$  cm. Ces électrodes sont directement enfoncées dans le sol de conductivité électrique  $\gamma_{\text{sol}}$  et reliées à un générateur idéal de force électro-motrice  $U$  constante. On fera l'hypothèse que le sol reste électriquement neutre.

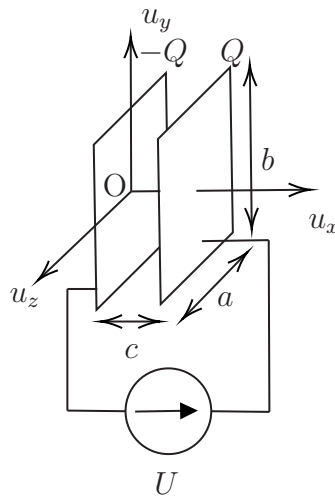


FIGURE 4: Géométrie de la sonde conductimétrique

**11.** En supposant que l'armature de gauche (potentiel  $V_g$ ) est à la masse, quel est le potentiel  $V_d$  de l'armature de droite ?

L'origine du repère est prise au centre de l'armature de gauche. On note respectivement  $V$  et  $\vec{E}$  le potentiel et le champ électrique dans l'espace inter-électrodes. On note  $Q$  la charge portée par l'électrode de droite et  $-Q$  la charge portée par l'électrode de gauche.

**12.** On suppose ici que l'on néglige les effets de bords. A quelle condition sur  $a$ ,  $b$  et  $c$  cela est-il possible? Montrer que, en négligeant les effets de bord, une étude des invariances et des symétries du problème permet d'obtenir

$$\vec{E} = E(x)\vec{u}_x \quad \text{et} \quad V(x, y, z) = V(x)$$

**13.** Montrer, en utilisant l'équation de Poisson que vous rappellerez, que, dans l'espace inter-électrodes :

$$V(x) = \frac{U}{c}x$$

**14.** Déterminer l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  dans ce même espace.

**15.** En déduire, en précisant soigneusement votre choix d'orientation, l'intensité totale  $I$  circulant dans l'espace entre les électrodes.

**16.** Obtenir alors l'expression de la résistance électrique  $R$  de l'échantillon de sol contenu entre les deux électrodes.

**17.** Déterminer l'unité de la conductivité électrique.

La conductivité  $\gamma_{\text{sol}}$  n'est pas constante et dépend en particulier de la teneur en eau du sol  $Hr$ . Il n'existe pas de relation simple entre ces grandeurs et elle dépend de plusieurs paramètres du sol : sa composition (vue dans la sous-partie précédente), son pH, sa teneur en différents minéraux... Le maraîcher a envoyé un échantillon de terre de son terrain pour analyse en laboratoire. Il a alors reçu les résultats suivants (figure 5). La résistivité  $\rho_0$  introduite correspond à la valeur minimale obtenue par le laboratoire pour le sol testé. Ainsi,  $\rho_{\text{sol}}/\rho_0$  prend par construction la valeur minimale 1.

La conductivité et la résistivité électrique sont liées par la relation :

$$\rho_{\text{sol}} = \frac{1}{\gamma_{\text{sol}}}$$

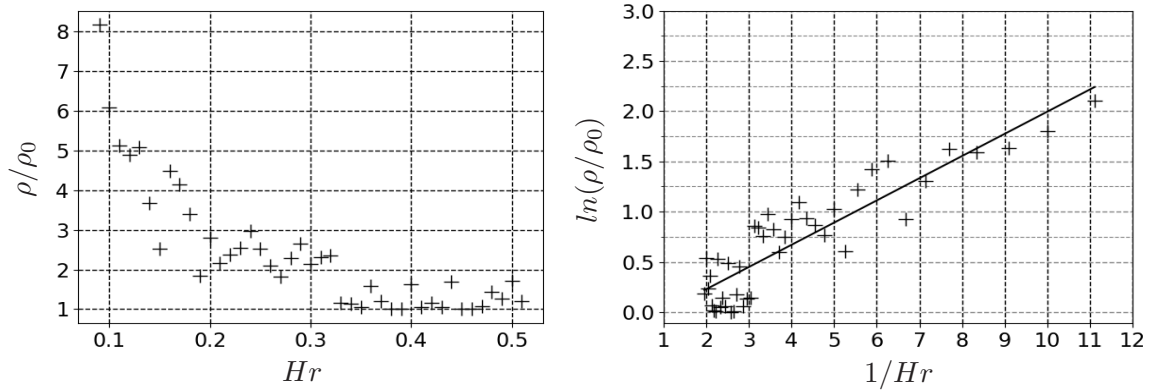


FIGURE 5: (gauche) résistivité  $\rho_{\text{sol}}/\rho_0$  en fonction de l'humidité relative  $Hr$ . (droite)  $\ln(\rho_{\text{sol}}/\rho_0)$  en fonction de  $1/Hr$ .

18. Justifier, à partir de ces courbes, qu'il est possible d'exprimer la résistivité du sol  $\rho_{\text{sol}}$  en fonction de sa teneur en eau  $Hr$  selon l'expression

$$\rho_{\text{sol}} = \rho_0 \exp\left(\frac{\alpha}{Hr} + \beta\right)$$

Déduire graphiquement les valeurs numériques de  $\alpha$  et  $\beta$ .

Pour obtenir une bonne production, le maraîcher cherche à maintenir l'humidité  $Hr$  de son sol entre  $Hr_{\text{min}} = 0,1$  et  $Hr_{\text{max}} = 0,2$ . Afin de fournir un capteur adapté, on propose de vérifier les performances du capteur sur cette plage de fonctionnement.

19. La résistance électrique est-elle croissante ou décroissante en fonction de  $Hr$ ? Déterminer littéralement la plage de résistance électrique  $[R_{\text{min}}, R_{\text{max}}]$  associée à la plage de fonctionnement cible. Aucune application numérique n'est attendue.

20. En pratique, le capteur n'est pas soumis à une tension continue  $U$  mais à une tension sinusoïdale de la forme  $U \cos(2\pi ft)$  avec  $f = 200$  Hz. Expliquer pourquoi. Vous discuterez en particulier l'hypothèse d'électroneutralité du sol.

### 3 Signal de commande de l'électrovanne

L'objectif de cette partie est de convertir la mesure de la résistance électrique  $R$  en un signal de commande d'une électrovanne (vanne pilotable électriquement). L'électrovanne considérée fonctionne ainsi :

- Si elle est soumise à une différence de potentiel nulle, elle permet le passage de l'eau (position ouverte) ;
- Si elle est soumise à une différence de potentiel de 12 V, elle bloque le passage de l'eau (position fermée).

Afin de conserver un niveau d'humidité optimal, on souhaite que l'arrosage soit piloté ainsi :

- Si le taux d'humidité  $Hr$  passe en dessous de  $Hr_{\text{min}}$  (correspondant à une valeur de la résistance supérieure à  $R_{\text{max}} = 15 \Omega$ ), l'arrosage se déclenche ;
- Si le taux d'humidité  $Hr$  passe au dessus de  $Hr_{\text{max}}$  (correspondant à une valeur de la résistance inférieure à  $R_{\text{min}} = 5 \Omega$ ), l'arrosage s'interrompt.

On propose d'intégrer le capteur d'humidité (assimilée à une résistance  $R$  dépendant de  $Hr$ ) dans le montage de la Figure 6. Afin de simplifier la modélisation, l'électrovanne se comporte comme un dipôle ohmique de résistance  $R_C$ .

**Tournez la page S.V.P.**

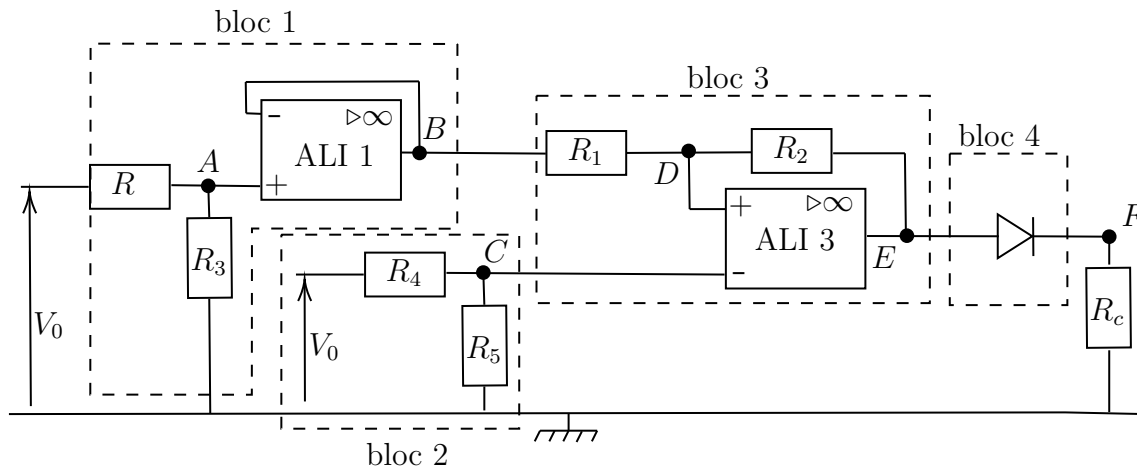


FIGURE 6: Electronique de conditionnement du signal

On suppose que tous les amplificateurs linéaires intégrés (notés ALI dans la suite) sont idéaux et qu'ils sont alimentés par une alimentation symétrique  $\pm V_0 = \pm 12\text{ V}$  si bien que leur tension de sortie  $s$  est telle que  $-V_0 \leq s \leq +V_0$

**21. Étude du bloc 1 :** Justifier que les résistances  $R_3$  et  $R$  sont en association série. Déterminer alors  $V_A$  puis  $V_B$ , les potentiels respectivement aux nœuds  $A$  et  $B$  en fonction de  $V_0$  et des résistances.

**22.** Quel est l'intérêt de l'ALI 1 ? Comment nomme-t-on un tel montage à ALI ?

**23. Étude du bloc 2 :** Déterminer  $V_C$  en fonction de  $V_0$  et des résistances  $R_4$  et  $R_5$ .

**24. Étude du bloc 3 :** L'ALI 3 fonctionne-t-il en régime linéaire ? En justifiant toutes les étapes, exprimer  $V_D$  (potentiel au nœud  $D$ ) en fonction de  $V_E$  et de  $V_B$ . Montrer que la tension  $V_E$  bascule entre les états  $+V_0$  et  $-V_0$  pour des valeurs seuils basse et haute de  $V_B$  respectivement notées  $V_b$  et  $V_h$ . On exprimera  $V_b$  et  $V_h$  en fonction de  $V_C$ ,  $V_0$  et  $\alpha = R_1/R_2$ .

**25.** Tracer le graphe  $V_E$  en fonction de  $V_B$  pour  $V_B$  compris entre 0 et  $2V_h$ .

**26.** Montrer que 
$$\alpha = \frac{V_h - V_b}{2V_0} \quad \text{et} \quad V_C = \frac{V_h + V_b}{2(1 + \alpha)}$$

**27.** On souhaite l'ouverture de l'électrovanne quand  $V_B$  devient inférieur à  $V_b$  et la fermeture de celle-ci lorsque  $V_B$  devient supérieur à  $V_h$ . En déduire, en utilisant l'expression de  $V_B$  obtenue à la question **21**, les expressions littérales de  $V_b$  et  $V_h$  en fonction de  $R_{\min}$ ,  $R_{\max}$ ,  $R_3$  et  $V_0$ . Faire les applications numériques en prenant  $R_3 = 5\ \Omega$ .

**28.** En déduire les valeurs numériques à donner à  $\alpha$  et  $V_C$ . On fixe  $R_1 = R_5 = 1\ \text{k}\Omega$ . En déduire les valeurs à choisir pour  $R_1$  et  $R_4$ .

**29.** A partir du tracé  $V_E$  en fonction de  $V_B$  obtenu à la question **25**, réaliser le tracé  $V_E$  en fonction de  $Hr$  pour  $Hr$  compris entre 0 et 0,4. On identifiera en particulier les valeurs de  $Hr$  associées au basculement de  $V_E$ .

**30.** On rappelle Figure 7 l'allure de la relation courant-tension aux bornes de la diode (bloc 4) supposée idéale. En déduire, en justifiant rigoureusement votre raisonnement, les valeurs prises par  $V_F$  en fonction des valeurs prises par  $V_E$ .

**31.** En utilisant le résultat de la question **29**, tracer le graphe  $V_F$  en fonction de  $Hr$ . Vérifier alors que l'électrovanne est correctement commandée.

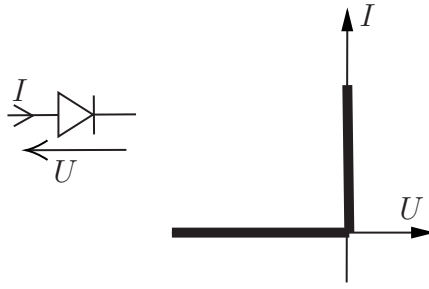


FIGURE 7: Caractéristique courant-tension d'une diode idéale

## II Arroser juste où il faut

Afin de réduire sa consommation d'eau, le maraîcher a fait le choix de réaliser son arrosage en utilisant des tuyaux dits micro-poreux. Ces tuyaux sont percés de pores (des trous) de diamètre  $d = 20 \mu\text{m}$  régulièrement espacés à la surface du tuyau. On note  $P_{\text{int}} = P_{\text{min}} = 1,5 \text{ bar}$  la pression à l'intérieur du tuyau micro-poreux et  $e = 1 \text{ mm}$  l'épaisseur de la paroi du tuyau. L'objectif de cette partie est de déterminer combien de pores doivent être percés par mètre de tuyau afin d'obtenir un débit linéique de  $D_{\text{lin}} = 6,0 \text{ L}\cdot\text{min}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ . On rappelle que, pour l'eau liquide, la viscosité dynamique vaut  $\eta = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  et la masse volumique  $\rho = 1,0 \text{ kg}\cdot\text{L}^{-1}$ .

**32.** Après avoir rappelé l'expression du nombre de Reynolds  $Re$ , évaluer le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement de l'eau à travers un pore. On choisira une valeur raisonnable pour la vitesse étant entendu que l'eau sort des pores au goutte à goutte.

**33.** Au vu de la valeur du nombre de Reynolds obtenue à la question précédente, comment peut-on qualifier le régime d'écoulement ?

Modélisons un pore par un cylindre d'axe  $(O, \vec{u}_z)$ , de rayon  $R = d/2$  et de longueur  $e$ . Considérons le repère cylindrique  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  dans lequel le champ eulérien des vitesses s'écrit  $\vec{v} = v(r)\vec{u}_z$ . L'écoulement est par ailleurs supposé stationnaire et incompressible.

**34.** En utilisant l'expression du champ eulérien des vitesses fournie, montrer qualitativement qu'une particule de fluide décrit un mouvement rectiligne uniforme.

Considérons alors un système fermé  $(\mathcal{K})$  constitué par le fluide contenu dans le cylindre de rayon  $r < R$  et de longueur  $e$  centré sur l'axe du pore.

**35.** A l'aide de la question précédente, que peut-on dire de l'évolution de la quantité de mouvement du système  $(\mathcal{K})$  au cours du temps ?

**36.** Ecrire alors le théorème de la résultante cinétique pour le système  $(\mathcal{K})$ . On listera à cette fin les forces qui s'exercent sur le système sans chercher à les expliciter.

La force de viscosité qui s'exerce sur  $(\mathcal{K})$  s'écrit, en notant  $S$  la surface latérale de  $(\mathcal{K})$  :

$$\vec{F}_{\text{visc}} = \pm \eta \frac{dv}{dr} S \vec{u}_z$$

**37.** Interpréter les termes intervenant dans son expression et justifier le choix du signe positif ou négatif.

En négligeant les effets gravitationnels, on peut montrer, par application du théorème de la résultante cinétique sur  $(\mathcal{K})$ , que le champ de vitesse est solution de l'équation suivante :

$$\frac{dv}{dr} = \frac{-r}{2\eta} \times \frac{P_{\text{int}} - P_0}{e}$$

Avec  $P_0$  la pression atmosphérique.

**38.** Identifier une condition aux limites adaptée et en déduire le champ de vitesse dans le pore.

39. En déduire le débit volumique  $D_1$  pour un pore puis faire l'application numérique.
40. Expliciter la densité linéique de pores  $n_t$  (en  $m^{-1}$ ) permettant d'obtenir le débit linéique spécifié  $D_{lin}$ . Faire l'application numérique pour  $n_t$ .

### III Dimensionnement du système de pompage

#### 1 Choix de la pompe

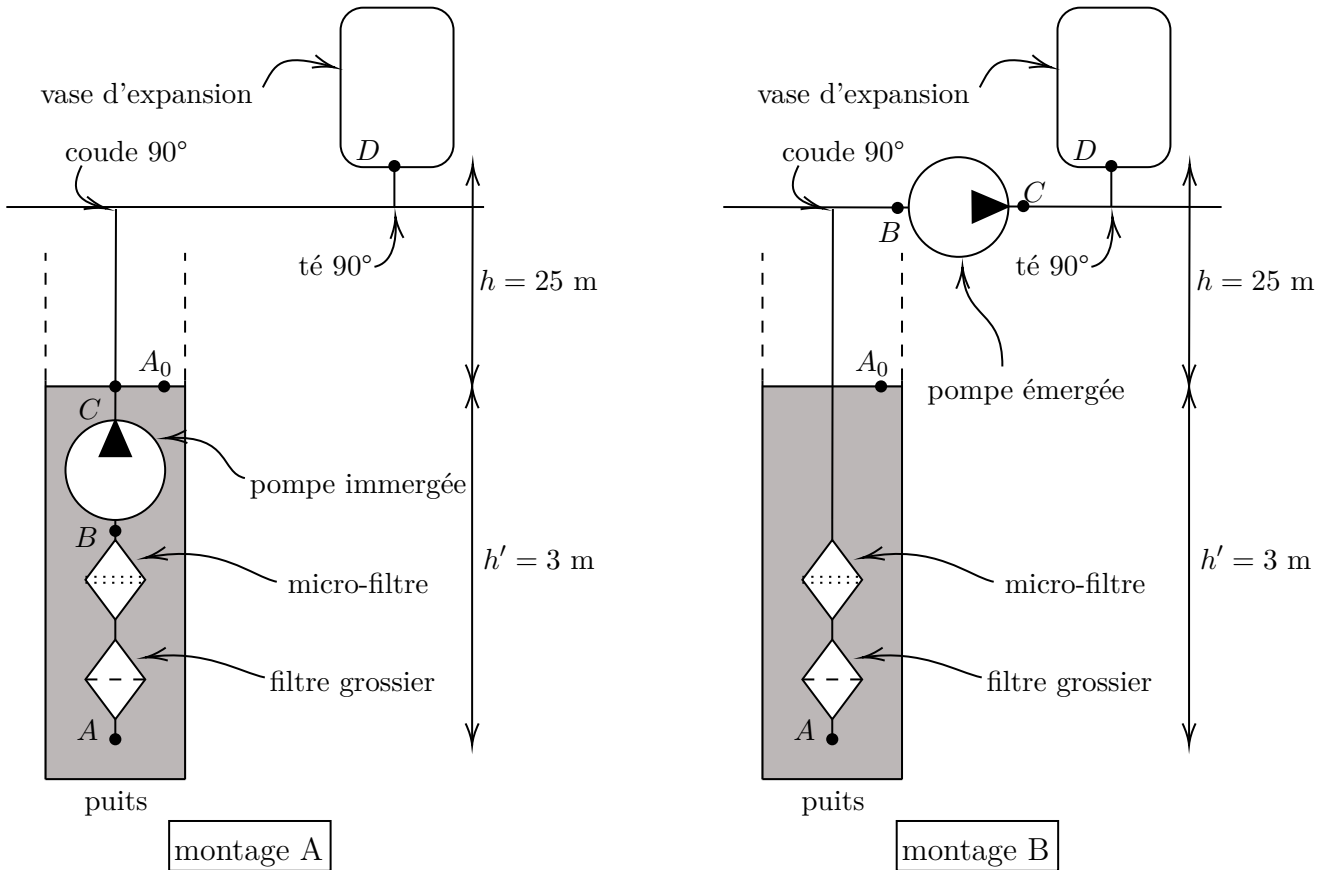


FIGURE 8: Représentation du dispositif hydraulique de puisage

L'eau servant à l'irrigation est pompée dans un puits de section constante  $S = 1 \text{ m}^2$  à une profondeur de  $h + h' = 28 \text{ m}$  sous le niveau du sol au point  $A$ . Le puits est au contact de l'atmosphère, sa surface libre est donc à la pression atmosphérique  $P_0$  et à une profondeur  $h = 25 \text{ m}$  (on note  $A_0$  un point de la surface libre). Elle est alors acheminée jusqu'à un réservoir tampon (appelé vase d'expansion et étudié dans la partie suivante) dans laquelle elle doit atteindre une pression maximale de  $P_{\max} = 6 \text{ bar}$ . La pompe est asservie en puissance afin d'assurer un débit constant  $D_p = 1000 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$  à l'entrée du vase d'expansion quelle que soit la pression dans celui-ci. Le réseau hydraulique dans son ensemble est représenté sur la Figure 8 avec deux positions possibles pour la pompe (montage A et montage B). On fera dans toute cette partie l'hypothèse d'un écoulement incompressible homogène et stationnaire.

La conduite d'acheminement a un diamètre intérieur  $\delta = 100 \text{ mm}$  et une longueur totale jusqu'au vase d'expansion de  $\ell = 100 \text{ m}$ . En entrée du système, on dispose un filtre grossier (pour éviter d'aspirer des feuilles, des branchages, des graviers...) puis un micro-filtre constitué d'un tampon en fibres végétales (afin d'éviter que du sable entre dans le corps de pompe).

41. Définir puis déterminer littéralement la vitesse débitante au point  $B$  (conduite de diamètre intérieur  $\delta$ ). Faire l'application numérique.

42. Justifier avec rigueur que l'une des configurations ne peut pas fonctionner, indépendamment de la puissance de la pompe. On pourra montrer que la pression atteint en certains points du circuit hydraulique des valeurs absurdes physiquement. Quel scientifique italien a montré en son temps la limite de fonctionnement d'une pompe ?

Dans toute la suite, on étudiera la seule configuration qui peut fonctionner. On s'intéresse maintenant à dimensionner la puissance de la pompe afin de répondre aux contraintes.

43. Que dire de la vitesse du fluide en  $A_0$  ? Montrer alors qu'entre les points  $A_0$  et  $D$ , la variation d'énergie cinétique du fluide est négligeable devant la variation d'énergie potentielle.

Dans toute la suite, on pourra négliger la variation d'énergie cinétique.

44. En négligeant toutes pertes de charge, déterminer littéralement la puissance mécanique  $\mathcal{P}$  que la pompe doit développer pour assurer le débit  $D_p$  lorsque la pression dans le vase d'expansion est maximale  $P_{\max} = 6$  bar. Réaliser l'application numérique.

45. Déterminer le nombre de Reynolds associé à cet écoulement dans la conduite. Faire l'application numérique et qualifier l'écoulement. Si on souhaitait tenir compte des pertes de charge (ce que nous ne chercherons pas à faire dans le présent problème), est-il possible d'utiliser le modèle développé dans la partie II ?

46. Le rendement de la conversion électro-mécanique du moteur de la pompe est estimé  $\eta_{\text{elec}} = 70\%$  et le rendement de la turbine de la pompe (conversion de l'énergie mécanique de rotation de la turbine en énergie disponible pour le fluide) est estimé à  $\eta_{\text{méca}} = 70\%$ . En déduire la puissance électrique  $\mathcal{P}_{\text{elec}}$  que doit avoir la pompe afin de répondre au cahier des charges.

## 2 Vase d'expansion

Le vase d'expansion (voir Figure 9) est une cuve métallique indéformable de volume total  $V_{\text{tot}} = 2000$  L. Un piston mobile sépare un gaz supposé parfait et l'eau assimilée à un liquide incompressible. Ce réservoir joue le rôle de tampon, c'est-à-dire qu'il accumule de l'eau. En effet, la pression dans le réservoir évolue entre la pression minimale de fonctionnement du système d'irrigation  $P_{\min} = 1,5$  bar et la pression maximale de la pompe  $P_{\max} = 6$  bar. Lorsque la pression est maximale, le gaz est fortement comprimé et le volume d'eau dans le réservoir est maximal. A l'inverse, le volume d'eau dans le réservoir est minimal lorsque la pression atteint  $P_{\min}$ . Un régulateur de pression (non étudié ici) permet finalement d'obtenir la pression constante  $P_{\min}$  dans les tuyaux micro-poreux.

On note  $T$  la température du gaz parfait contenu dans le vase d'expansion et on suppose que ce dernier est au contact thermique avec l'atmosphère extérieure à la température constante  $T_0 = 20$  °C.

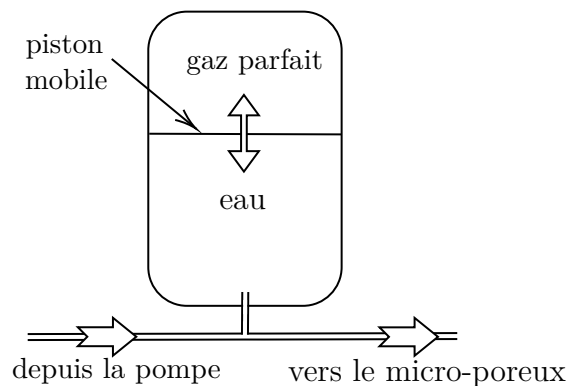


FIGURE 9: Vue du vase d'expansion

Grâce à ce système, la pompe fonctionne de manière discontinue (elle est allumée quand la pression descend en dessous de  $P_{\min}$  est coupée lorsque la pression dépasse  $P_{\max}$ ) bien que l'arrosage soit

continu. Cela permet d'augmenter la longévité de la pompe en ne la sollicitant pas continuellement. A cette fin, le constructeur préconise une phase « pompe allumée » de 4 minutes maximum et une durée supérieure à 6 minutes entre deux allumages successifs.

On note respectivement  $V_{\min}$  et  $V_{\max}$  les volumes d'eau minimum et maximum dans la cuve.

**47.** On suppose les phases de compression puis de détente lentes. Quelle(s) conséquence(s) cela-a-t-il sur la nature des évolutions du gaz ? Une réponse argumentée est attendue.

**48.** Exprimer  $\Delta V = V_{\max} - V_{\min}$  en fonction de  $V_{\text{tot}}$ ,  $V_{\min}$  et du rapport  $\alpha = P_{\min}/P_{\max}$ .

Afin d'optimiser le fonctionnement de la pompe, on souhaite maximiser le volume d'eau  $\Delta V$  que le vase d'expansion peut stocker. On se place dans ces conditions d'exploitation pour les deux questions suivantes.

**49.** Dans ces conditions, déterminer littéralement puis numériquement la quantité de matière  $n_{\text{gaz}}$  à utiliser pour remplir le volume au-dessus du piston. La constante des gaz parfaits sera prise égale à  $R = 8 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

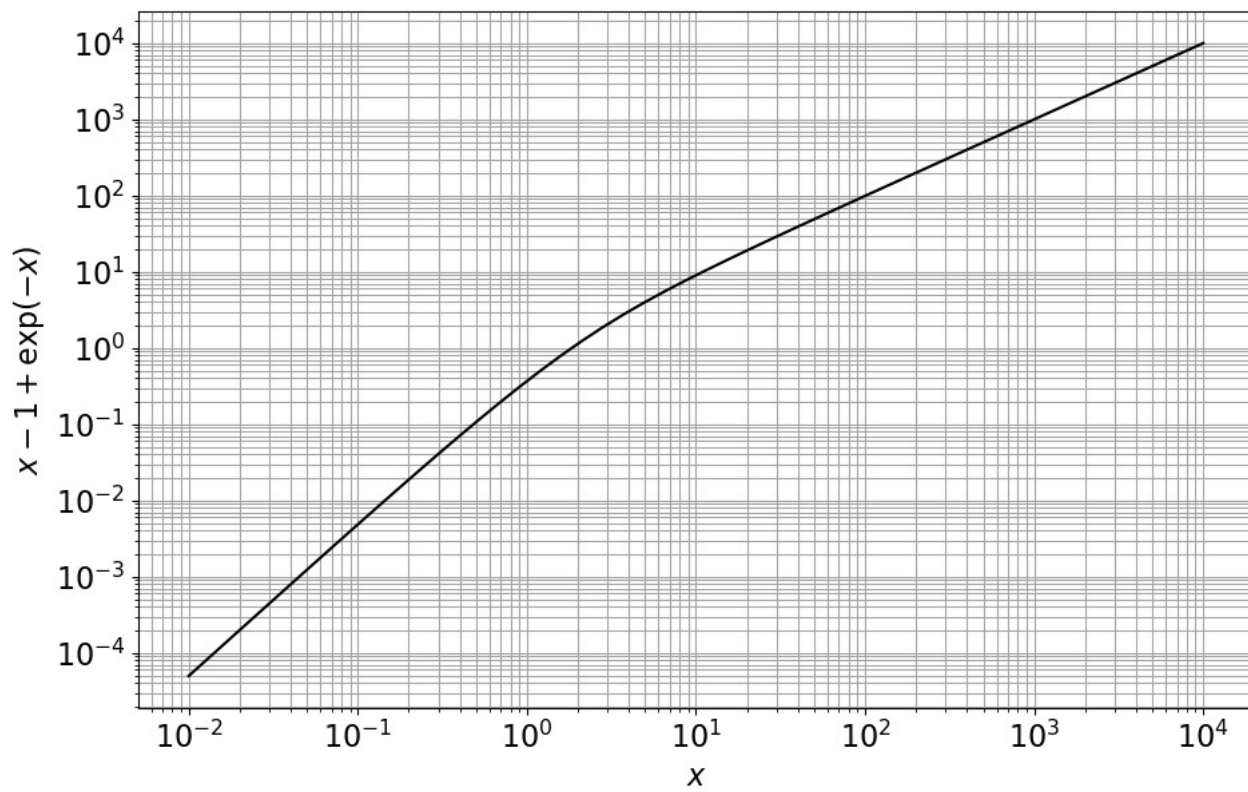
**50.** En supposant que le réseau d'irrigation est constitué de  $L = 100 \text{ m}$  de tuyaux micro-poreux avec un débit linéique  $D_{\text{lin}} = 6 \text{ L.m}^{-1}.\text{min}^{-1}$ , déterminer la durée de la phase « pompe allumée » notée  $\tau_1$  puis celle de la phase « pompe éteinte » notée  $\tau_2$ . Les préconisations du constructeur sont-elles respectées ?

~~~~~ **FIN** ~~~~~





**NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE**



Reproduction de la figure 3 : représentation graphique de la fonction f en échelle log-log

