Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

À rendre avec la copie 1 feuille de papier millimétré

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. **Les questions non correctement référencées ne seront pas notées**. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Le sujet est composé de 4 parties.
Les deux premières parties sont indépendantes entre elles, les deux dernières parties utilisent certains résultats établis dans les deux premières parties.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.

- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est strictement interdit. Les surveillants et surveillantes se réservent le droit de les confisquer.

- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.

- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.

- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance. La présence d'une information d'identification en dehors du cartouche donnera lieu à un point de pénalité et la page concernée pourra être soustraite de la correction.

Tournez la page S.V.P

Partie A : Quelques matrices

On considère les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Rappeler la caractérisation des matrices trigonalisables à l'aide du polynôme caractéristique.
2. M_1 est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
   Déterminer (si possible) une matrice P_1 inversible et une matrice diagonale D_1 telles que $M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$.
   Le calcul de P_1^{-1} n'est pas demandé.
3. M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
   Déterminer (si possible) une matrice P_2 inversible et une matrice diagonale D_2 telles que $M_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}$.
   Le calcul de P_2^{-1} n'est pas demandé.
4. (a) M_3 est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
   (b) On note f_3 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice M_3.
   Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f_3 est $T_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On s'intéresse désormais aux matrices $M(a,\, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$.

5. A quelle condition nécessaire et suffisante les matrices $M(a,\, b)$ sont-elles inversibles ?
6. Calculer le discriminant $\Delta(a,\, b)$ du polynôme caractéristique de $M(a,\, b)$.
7. (a) Justifier que si $\Delta(a,\, b) = 0$ alors $M(a,\, b)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   (b) Lorsque $\Delta(a,\, b) \neq 0$, $M(a,\, b)$ est-elle diagonalisable ? On précisera si c'est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et/ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
8. Représenter sur la feuille de papier millimétré fournie :
   - l'ensemble des points de coordonnées $(a,\, b)$ tels que $M(a,\, b)$ est non inversible ;
   - l'ensemble des points de coordonnées $(a,\, b)$ tels que $M(a,\, b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
   - l'ensemble des points de coordonnées $(a,\, b)$ tels que $M(a,\, b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
   - l'ensemble des points de coordonnées $(a,\, b)$ tels que $M(a,\, b)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$;
   - les 3 points correspondant aux matrices M_1, M_2 et M_3 définies en début de cette partie.

Partie B : Un couple de variables aléatoires

Dans cette partie, on considère la matrice $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ainsi que le couple de variables aléatoires $(X,\, Y)$ dont la loi conjointe est donnée par :

- $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{x_1,\, x_2,\, x_3\}$ avec $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$.
- $\forall i \in \{1,\, 2,\, 3\}$, $\forall j \in \{1,\, 2,\, 3\}$, $P(X = x_i, Y = x_j) = c_{i,\,j}$.

On note U le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et V le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

On convient de confondre une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec son unique coefficient.

1. (a) Justifier soigneusement que le produit CU permet d'obtenir la loi de X puis déterminer cette loi.
   (b) Vérifier que l'espérance de X, notée $E(X)$, est égale à $V^{\top}CU$ puis la calculer.
2. Donner, sans justification, les produits matriciels qui permettent d'obtenir la loi marginale de Y et l'espérance $E(Y)$ de Y puis effectuer ces produits.
3. Que représente le produit $V^{\top}CV$ pour le couple $(X,\, Y)$? Une justification est attendue.
   Calculer ce produit.
4. Calculer la covariance de X et Y.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? On donnera deux justifications différentes.
6. Que représente la trace de C pour le couple $(X,\, Y)$? La calculer.

Partie C : Des variables aléatoires dans une matrice.

Dans cette partie, on considère deux variables aléatoires A et B ainsi que la matrice $M(A,\, B) = \begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On suppose dans cette question que les variables aléatoires A et B sont égales respectivement aux variables aléatoires X et Y définies par la partie B.
   (a) Déterminer la probabilité que $M(A,\, B)$ soit inversible.
   (b) Calculer la probabilité que $M(A,\, B)$ ne soit pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ni dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

On suppose désormais et jusqu'à la fin de cette partie que A et B sont deux variables aléatoires indépendantes.

2. On suppose que A et B sont à valeurs dans une partie H de $\mathbb{N}$.
   Etablir soigneusement que

$$P(A = B) = \sum_{k\in H} P(A = k)P(B = k).$$

3. On suppose dans cette question que A suit la loi binomiale de paramètres n et p où n est un entier naturel non nul et p est un réel appartenant à $]0\,;\,1[$ et B suit la loi géométrique de paramètre r où r est un réel appartenant à $]0\,;\,1[$.
   (a) Rappeler l'univers-image $A(\Omega)$ de A ainsi que les probabilités $P(A=k)$ pour $k \in A(\Omega)$.
   (b) Rappeler l'univers-image $B(\Omega)$ de B ainsi que les probabilités $P(B=k)$ pour $k \in B(\Omega)$.
   (c) Démontrer que la probabilité que $M(A,\, B)$ ne soit pas inversible est égale à
   $$\frac{r}{1-r}[(1-pr)^n-(1-p)^n].$$
4. On suppose dans cette question que A suit la loi de Poisson de paramètre λ et que $C=-B$ suit la loi de Poisson de paramètre μ où λ et μ sont deux réels strictement positifs.
   (a) Rappeler l'univers-image $A(\Omega)$ de A ainsi que les probabilités $P(A=k)$ pour $k \in A(\Omega)$.
   (b) Démontrer que $A+C$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.
   On pourra utiliser les fonctions génératrices.
   (c) En déduire la probabilité que $M(A,\, B)$ soit inversible.

On suppose désormais jusqu'à la fin de cette partie que A suit la loi de Poisson de paramètre λ et B suit la loi de Poisson de paramètre μ où λ et μ sont deux réels strictement positifs.

5. Démontrer que la probabilité que $M(A,\, B)$ soit non inversible est égale à
   $$I=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}.$$

L'objectif des questions suivantes est de déterminer une valeur approchée de I.

6. *Une première option* : Pour tout $n \geqslant 0$, on note $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}$.
   (a) Démontrer que
   $$\forall n \geqslant 0,\ |R_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\lambda\mu-(\lambda+\mu)}.$$
   (b) Ecrire en langage PYTHON une fonction val_app de paramètre un réel strictement positif eps, qui calcule et renvoie la valeur d'une somme partielle de I représentant une valeur approchée de I à eps >0 près.
   On supposera que les valeurs de λ et de μ sont stockées respectivement dans les variables globales la et mu et que les fonctions exponentielle et factorielle sont disponibles grâce à la commande :
   ```
   from math import exp, factorial
   ```
   Il n'est pas demandé la documentation des fonctions mais il possible et même recommandé de commenter les lignes de code.
   (c) Quelle instruction doit-on rajouter pour afficher une valeur approchée de I à 10^{-5} près ?

7. *Une deuxième option* : Soit N un entier naturel non nul. On simule N fois de façon indépendante les variables aléatoires A et B.
Pour $i \in [\![1\,;\,N]\!]$, on note J_i la variable aléatoire égale à 1 si la matrice $M(A,\,B)$ est non inversible lors de la i-ème simulation et égale à 0 sinon.
On note également $K_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} J_i$ et $\overline{K_N} = \dfrac{1}{N} K_N$.
   (a) Reconnaitre la loi de la variable aléatoire J_i pour $i \in [\![1\,;\,N]\!]$. On donnera son nom ainsi que son ou ses paramètres.
   (b) Quelle est la loi de K_N ? On donnera son nom ainsi que son ou ses paramètres. Une justification est attendue.
   (c) En déduire l'espérance et la variance de $\overline{K_N}$.
   (d) Démontrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ P(\left|\overline{K_N} - I\right| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{4N\varepsilon^2}$$
   (e) En déduire que
$$\forall \varepsilon > 0,\ P(I \in [\overline{K_N} - \varepsilon\,;\,\overline{K_N} + \varepsilon]) \geqslant 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}.$$
   (f) Pour $\lambda = 1$ et $\mu = 2$, on effectue $N = 100\,000$ simulations.
La matrice $M(A,\,B)$ a été non inversible à 21 357 reprises.
Quelle information concernant la valeur de I, l'inégalité précédente donne-t-elle si on prend $\varepsilon = 10^{-2}$? Puis $\varepsilon = 10^{-3}$?

Partie D : Un deuxième couple de variables aléatoires.
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = \{x_1,\,x_2,\,...,\,x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1,\,y_2,\,...,\,y_n\}$.
On note $Q = (q_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$\forall (i,\,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2,\ q_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j).$$

1. On suppose que X et Y sont indépendantes et que $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $P(X = x_i) \neq 0$.
   (a) Justifier que le rang de la matrice Q est égal à 1.
   (b) Que peut-on en déduire concernant les éventuelles valeurs propres (réelles) de Q ainsi que leur multiplicité ?
   (c) Démontrer que Q est diagonalisable.
   (d) Lorsque $n = 4$, donner un exemple où Q n'est pas diagonalisable si on enlève l'hypothèse $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $P(X = x_i) \neq 0$.
Les deux variables aléatoires X et Y devront être non constantes.
2. On suppose que le rang de Q est égal à 1.
Démontrer que X et Y sont indépendantes.
On pourra, si nécessaire, généraliser sans démonstration certains résultats vus dans la partie B.

IMPRIMERIE NATIONALE – 26 1045 – D'après documents fournis